

波束変換を用いた熱方程式の解のモジュレーションノルム評価¹

栗田 萌美

(東京理科大学理学研究科数学専攻 修士2年)

本研究では、次の熱方程式の初期値問題について考える。

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} \Delta u + V u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで、 $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする。この初期値問題 (1) において、 V を具体的に与えたとき、以下で定義されるモジュレーションノルムで (1) の解を評価した。

定義 1. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする。このとき $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し、関数 φ から定まる f の波束変換 $W_\varphi f$ を次のように定義する。

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy.$$

定義 2. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする。このとき $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ に対して、モジュレーション空間 $M_{p,q}^s$ を次のように定義する。

$$M_{p,q}^s = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_{p,q}^s, \varphi} := \|\langle \xi \rangle^s \|W_\varphi f(x, \xi)\|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

ここで、 $\langle \xi \rangle^s = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ である。 $\|\cdot\|_{M_{p,q}^s, \varphi}$ をモジュレーションノルムという。また、モジュレーション空間は φ に依らないことが知られている。

以下では、 $\varphi_0(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ とする。

[2] では、 $V = 0$ の場合に、

$$\|e^{\frac{\Delta}{2}t} u_0\|_{M_{p,q}^s, \varphi_0} \leq C(1+t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}(1+t^{-\frac{s-\tilde{s}}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q})}) \|u_0\|_{M_{p',q'}^{\tilde{s}}, \varphi_0} \quad (\forall t > 0)$$

が示されている。また、[3] では、[1] での方法を用いて [2] の別証明を与えている。

定理 1. $V(x) = A \cdot x$ ($A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$) のとき、 $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ を定数、 $1 \leq p', q' \leq \infty, \tilde{s} \in \mathbb{R}$ を $p' \leq p, q' \geq q, \tilde{s} \leq s$ をみたすものとする。このとき、ある定数 $C > 0$ が存在して、任意の $u_0 \in M_{p',q'}^{\tilde{s}}$ に対して

$$\|e^{(\frac{\Delta}{2}-A \cdot x)t} u_0\|_{M_{p,q}^s, \varphi_0, \exp} \leq C \exp[|A|^2 t^3] (1+t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} (1+t^{-\frac{s-\tilde{s}}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q})}) \|u_0\|_{M_{p',q'}^{\tilde{s}}, \varphi_0} \quad (\forall t > 0)$$

が成り立つ。ここでは

$$\|f\|_{M_{p,q}^s, \varphi, \exp} = \left\| \langle \xi \rangle^s \left\| \exp \left[-\frac{|x + \frac{1}{2} A t^2|^2}{2(t+1)} \right] W_\varphi f(x, \xi) \right\|_{L_x^p} \right\|_{L_\xi^q}$$

という重み付きノルムを用いる。

また、 $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ の場合と $V = A \cdot \nabla + B$ ($A \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}$) に換えた場合についても、波束変換を用いて、定理 1 と類似のモジュレーションノルムでの評価を得ることができた。

参考文献

- [1] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, “Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator”, SUT Journal of Mathematics Vol. 47, No. 2 (2011), 175–183.
- [2] T. Iwabuchi, “Well-posedness of solutions for nonlinear heat equations and Navier-Stokes equations in modulation spaces”, preprint.
- [3] 中嶋克臣, “熱方程式の解に対する $M_{p,q}^s$ ノルム評価”, 東京理科大学理学研究科数学専攻修士論文 (2013).

¹ 本講演は加藤圭一氏との共同研究に基づく