空間1次元Chern-Simons-Dirac方程式の初期値問題の適切性と非適切性

町原秀二　(埼玉大学大学院理工学研究科)*

時空間 $1+1$ 次元におけるChern-Simons-Dirac方程式の初期値問題(CSD)を考える：

$$\begin{cases} i(\partial_t - iA_0)\psi + i(\partial_x - iA_1)\alpha\psi = m\beta\psi, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ \partial_t A_1 - \partial_x A_0 = \psi^*\beta\psi, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ \partial_t A_0 - \partial_x A_1 = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0 \in H^s(\mathbb{R}),\ \mathbb{A}(0,\cdot) = \mathbb{A}_0 \in H^r(\mathbb{R}), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{CSD}$$

ここで，未知関数はスピノール $\psi = \binom{\psi_1(t,x)}{\psi_2(t,x)} : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2$ 及びChern-Simonsゲージ場 $\mathbb{A} = \binom{A_0(t,x)}{A_1(t,x)} : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ であり，第3式はChern-Simonsゲージ場に対するLorenzゲージ条件である．$\psi_0 = \binom{\psi_{0,1}}{\psi_{0,2}}$ と $\mathbb{A}_0 = \binom{A_{0,0}}{A_{0,1}}$ はそれぞれの初期値である．また，α, β は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ により定義される2次のHermite行列を表し，m は非負定数である．この方程式はHuh [3] により導入された．

本講演では(CSD)の時間局所適切性をSobolev 空間 $(\psi,\mathbb{A})\in H^s\times H^r$ で議論する．尺度不変性の議論により得られる臨界指数は $s=r=-1/2$ である．既存の結果としてHuh [3] が $s=r=0$ で時間局所的適切性を示し, そしてそれはBournaveas-Candy-Machihara [2] により，$-1/2<r\le s\le r+1$ の範囲にまで広げられた.

これらの結果を踏まえ, 講演者と信州大学の岡本葵氏との共同研究により得られた結果を報告する.

定理 1. $m\ge 0$. *CSDは以下の指数に対する時間局所適切性が成立する:*

(i) $-1/2<r\le s\le r+1$ *(Bournaveas-Candy-Machihara),*

(ii) $|s|<1/2,\quad r=-1/2,$

(iii) $s=0,\quad -1\le r\le -1/2.$

またこれらの指数でないとき, $m=0$ のとき, 非適切となる.

本講演では特に非適切性の証明に焦点をあてる. $m=0$ としてCSDを次のように書き変える: $u_\pm := \psi_1\pm\psi_2$, $A_\pm := A_0\mp A_1$, $u_{\pm,0} := \psi_{0,1}\pm\psi_{0,2}$, $a_\pm := A_{0,0}\mp A_{0,1}$ とし，

$$\begin{cases} (\partial_t\pm\partial_x)u_\pm = iA_\mp u_\pm, \quad (\partial_t\pm\partial_x)A_\pm = \mp\Re(u_+\overline{u_-}), \\ \quad u_\pm(0,x) = u_{\pm,0}(x), \qquad A_\pm(0,x) = a_\pm(x). \end{cases}$$

積分方程式に書き変えると次になる:

$$u_\pm(t,x) = u_{\pm,0}(x\mp t) + i\int_0^t (A_\mp u_\pm)(t', x\mp(t-t'))dt',$$
$$A_\pm(t,x) = a_\pm(x\mp t) \mp \Re\int_0^t (u_+\overline{u_-})(t', x\mp(t-t'))dt'.$$

* 〒338-8570 埼玉大学大学院 理工学研究科 数学教室
e-mail: `machihar@rimath.saitama-u.ac.jp`

この方程式の解の次の展開を考える

$$u_\pm = \sum_{k=1}^{\infty} u_\pm^{(k)}, \quad A_\pm = \sum_{k=1}^{\infty} A_\pm^{(k)},$$

ここで

$$\begin{aligned} u_\pm^{(1)}(t,x) &:= u_{\pm,0}(x \mp t), \quad A_\pm^{(1)}(t,x) := a_\pm(x \mp t), \\ u_\pm^{(k)}(t,x) &:= i \int_0^t \sum_{\substack{k_1,k_2 \in \mathbb{N}, \\ k_1+k_2=k}} (A_\mp^{(k_1)} u_\pm^{(k_2)})(t', x \mp (t-t'))dt', \quad k = 2, 3, \ldots, \\ A_\pm^{(k)}(t,x) &:= \mp \int_0^t \sum_{\substack{k_1,k_2 \in \mathbb{N}, \\ k_1+k_2=k}} \Re(u_+^{(k_1)} \overline{u_-^{(k_2)}})(t', x \mp (t-t'))dt', \quad k = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

有界な初期値列 $\|u_{\pm,0,n}\|_{H^s}, \|a_{\pm,n}\|_{H^r} \leq M$ をうまくとり, 対応する解の上記展開に対して $u_{\pm,n}^{(2)}$, や $A_{\pm,n}^{(2)}$ の項のみが発散することを示す.

参考文献

[1] I. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228-259.

[2] N. Bournaveas, T. Candy, and S. Machihara, *Local and global well-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension*, Differential Integral Equations. **25** (2012), no. 7-8, 699-718.

[3] H. Huh, *Global solutions and asymptotic behaviors of the Chern-Simons-Dirac equations in* $\mathbb{R}^{1+1}$, J. Math. Anal. Appl. **366** (2010), no. 2, 706-713.

[4] T. Iwabuchi and T. Ogawa, *Ill-posedness for nonlinear Schrödinger equation with quadratic non-linearity in low dimensions*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

[5] S. Machihara and M. Okamoto, *Ill-posedness for the Cauchy problem of the Chern-Simons-Dirac system in one dimension*, preprint.