Boundedness in quasilinear Keller-Segel systems on non-convex bounded domains[1]

関　清隆
(東京理科大学大学院・理)

次の準線形 Keller-Segel 系の初期値境界値問題 (KS) について考える：

$$
\text{(KS)}\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^N (N\in\mathbb{N})$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし, 初期値 u_0, v_0 は非負値関数とする. また, D, S がある $\varepsilon\ge 0$ に対して以下を満たすと仮定する：

(1)　$0\le D, S\in C^2([0,\infty)),\quad S(0)=0,$

(2)　$S(u)/D(u)\le K(u+\varepsilon)^{\alpha}\qquad (\exists\,\alpha<2/N\quad \exists\,K>0\quad \forall\,u>0),$

(3)　$K_0(u+\varepsilon)^{m-1}\le D(u)\le K_1(u+1)^{M-m}(u+\varepsilon)^{m-1}\qquad (\exists\,m,M\ge 1\quad \exists\,K_0,K_1>0\quad \forall\,u\ge 0).$

特に (3) は $\varepsilon>0$ で非退化型 ($D(0)>0$), $\varepsilon=0$ で退化型 ($D(0)=0$) であることを表している.

先行研究として問題 (KS) の解の (時間大域的) 存在, 有界性について以下の結果が知られている：

非退化型 ($D(0)>0$)

- 有界凸領域：$\varepsilon=1$ の場合の解の存在, 有界性 (Tao-Winkler [4]).
- 有界非凸領域：初期値に強い条件を課した場合の解の存在, 有界性 (Senba-Suzuki [2]).

退化型 ($D(u)=u^{m-1}$, $S(u)=u^{q-1}$)

- 全空間：$q-m<2/N$ の場合の解の存在 (有界性は未解決) (Sugiyama-Kunii [3], Ishida-Yokota [1]).

これらの先行研究では, 初期値に対する強い条件や領域の形状に依存した評価が用いられている. 本研究では, 以下の定理のようにこれまで未解決であった非凸領域上での解の存在と有界性を得た.

定理.
$m, M\ge 1$, $\alpha<2/N$, $K, K_0, K_1>0$ とし, D, S がある $\varepsilon\ge 0$ に対して (1), (2), (3) を満たすとする.
(**I**) $\varepsilon>0$, $(u_0,v_0)\in C(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega})$ のとき, (KS) の有界な古典解 (u,v) が存在する.
(**II**) $\varepsilon=0$, $(u_0,v_0)\in L^\infty(\Omega)\times W^{1,\infty}(\Omega)$ のとき, 次を満たす (KS) の有界な弱解 (u,v) が存在する：

$$u\in L^\infty(0,\infty;L^\infty(\Omega)),\ \int_0^u D(\sigma)\,d\sigma\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);H^1(\Omega)),\ v\in L^\infty(0,\infty;W^{1,\infty}(\Omega)).$$

参考文献

[1] S. Ishida, T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type*, J. Differential Equations **252** (2012), 1421–1440.

[2] T. Senba, T. Suzuki, *A quasi-linear parabolic system of chemotaxis*, Abstr. Appl. Anal. **2006** (2006), 1–21.

[3] Y. Sugiyama, H. Kunii, *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.

[4] Y. Tao, M. Winkler, *Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity*, J. Differential Equations **252** (2012), 692–715.

[1]This is a joint work with Sachiko Ishida and Tomomi Yokota.