

Escape rate of symmetric jump-diffusion processes

塩沢 裕一（岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部）

正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程について、体積増大度と係数増大度の上限によって無限遠方への脱出レートの特徴づける。本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが、飛躍拡散型対称マルコフ過程に対しても同様の結果が得られる。

(X, d) を局所コンパクト可分距離空間とし、 m を X 上の正值ラドン測度で X 全体に台を持つものとする。 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(X; m)$ 上の正則ディリクレ形式とし、 $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in X})$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される m 対称マルコフ過程とする。 X 上の台がコンパクトな連続関数全体を $C_0(X)$ とかき、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する：

$$\mathcal{E}(u, v) = \iint_{X \times X \setminus \text{diag}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(\mathrm{d}x \mathrm{d}y) \quad u, v \in \mathcal{F} \cap C_0(X).$$

ただし、 diag は $X \times X$ 上の対角線集合であり、 $J(\mathrm{d}x \mathrm{d}y)$ は $X \times X \setminus \text{diag}$ 上の正值対称ラドン測度である。以下では積分核 $J(x, \mathrm{d}y)$ が存在して $J(\mathrm{d}x \mathrm{d}y) = J(x, \mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ となることを仮定する。

X 上の関数のクラス $\mathcal{A}$ を次で定める：

$$\mathcal{A} := \left\{ \rho \in C(X) \cap \mathcal{F}_{\text{loc}} \mid \lim_{x \rightarrow \Delta} \rho(x) = \infty, \text{ 各 } r > 0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト} \right\}.$$

ただし、 $\rho \in \mathcal{A}$ に対して

$$B_\rho(r) := \{x \in X \mid \rho(x) < r\}, \quad r > 0.$$

仮定 1. X 上の単調非減少な非負値関数列 $\{\rho_R\}_{R \geq 1} \subset \mathcal{A}$ と $X \times X \setminus \text{diag}$ 上の単調増加な非負値関数列 $\{F_R\}_{R \geq 1}$ の組で次の 3 条件を満たすものが存在する：

(i) 各 $R \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \bullet \quad M_1(R) &:= \sup_{x \in B_{\rho_R}(R)} \int_{0 < d(x, y) < F_R(x, y)} (\rho_R(x) - \rho_R(y))^2 J(x, \mathrm{d}y) < \infty; \\ \bullet \quad M_2(R) &:= \sup_{x \in X} \int_{d(x, y) \geq F_R(x, y)} J(x, \mathrm{d}y) < \infty. \end{aligned}$$

(ii) $K \subset X$ をコンパクト集合とする。すべての十分大きな正数 R に対して $K \subset B_{\rho_R}(R/4)$.

(iii) $\rho := \rho_1$ とおく。すべての十分大きな R に対して

$$0 < d(x, y) < F_R(x, y) \implies |\rho_R(x) - \rho_R(y)| < \frac{1}{32} \cdot \frac{R}{\log m(B_\rho(R)) + \log \log R}.$$

関数 F_R は“飛躍の大きさ”を定め、関数 ρ_R は“小さな飛躍”に適合した長さを表す。 $M_1(R)$ と $M_2(R)$ は、それぞれ確率過程 $\rho_R(X_t)$ の“小さな飛躍”と“大きな飛躍”との起こる頻度と見なす。

$N_1(R)$ は $M_1(R) \leq N_1(R)$ を満たす単調非減少関数とし、 $N_2(R)$ は $M_2(R) \leq N_2(R)$ を満たす単調非増加関数とする。 $\eta \in (0, 2]$ を固定し、関数 $\psi_\eta(R)$ を次で定める：

$$\psi_\eta(R) := \frac{R^\eta}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log \log R)}.$$

仮定 2. $\psi_\eta(R)$ と $N_2(R)$ は次の条件を満たす。

(i) すべての十分大きな R について $\psi_\eta(R)$ は単調増加かつ $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi_\eta(R) = \infty$ 。

(ii) ある $\nu > 1$ と $c > 0$ が存在して

$$\psi_\eta(R) N_2(R) \leq \frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は“大きな飛躍”の起こる頻度を制限する。

定理 1. もし M が保存的ならば、仮定 1, 2 の下である $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(X_t)}{\psi_\eta^{-1}(ct)} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad m\text{-a.e. } x \in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan [G99] の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している。一方、Grigor'yan [G99] の結果は、リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで、Grigor'yan-Hsu [GH09], Hsu-Qin [HQ10], Ouyang [O] により一般化および精密化されている。これらの結果は、Huang [H1], Huang-S. [HS14] によって、局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている。

注意 1. (i) 定理 1 の “ $m\text{-a.e. } x \in X$ ” は “ $q\text{-e. } x \in X$ ” (“ $q\text{-e.}$ ” は “quasi-everywhere” の略) に精密化できる。

(ii) $\mu > 0$ とする。 $\psi_\eta(R)$ を次の関数で置き換えても定理 1 の主張は正しい：

$$\tilde{\psi}(R) := \frac{R^2}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log \log R)(\log R)^\mu}.$$

例 1. (X, d) を d 次元ユークリッド空間とし、 $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする。 m を d 次元ルベーグ測度とし、 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \text{diag}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \frac{c(x, y)}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{E}(u, u) < \infty\}. \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha \in (0, 2)$ とし、 $c(x, y)$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の正值可測関数とする。 $\mathbb{R}^d$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と表し、 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ が可閉であるこ

とを仮定する. $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ の閉包として定まる $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と表し, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in \mathbb{R}^d})$ とかく.

$c(x, y)$ が定数

$$c_{d,\alpha} = \frac{\alpha 2^{\alpha-2} \Gamma((d+\alpha)/2)}{\pi^{d/2} \Gamma(1-\alpha/2)}$$

のとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を対称安定過程と呼ぶ. このとき,

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) v(x) dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Khintchine (1938) は対称安定過程について

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{t^{1/\alpha} (\log t)^{(1+\varepsilon)/\alpha}} \leq 1, \quad P_x\text{-a.s.}, x \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立し, この結果は精密であることを示した. $c(x, y)$ が上下から正定数で抑えられるとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を対称安定型過程と呼ぶ [Z.-Q. Chen-Kumagai (2003)]. このときも, 球からの脱出時刻の評価 [Barlow-Grigor'yan-Kumagai (2009)] を用いて, (1) と同様の結果を得ることができる.

関数 $c(x, y)$ が非有界である／退化している場合も, 定理 1 を用いて, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程の脱出レートの評価を得ることができる. 以下ではその例を挙げる.

(1) ある $\delta \in [0, 1)$ と $q \in [0, \alpha)$ が存在して, $c(x, y)$ は次を満たすことを仮定する:

$$c(x, y) \asymp \begin{cases} (1 + |x|)^2 (\log(2 + |x|))^\delta + (1 + |y|)^2 (\log(2 + |y|))^\delta, & |x - y| < 1, \\ (1 + |x|)^q + (1 + |y|)^q, & |x - y| \geq 1. \end{cases}$$

(a) $\alpha - q > 1 - \delta$ ならば, ある $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{\exp(ct^{\frac{1}{1-\delta}})} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) $0 < \alpha - q \leq 1 - \delta$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{\exp\left(ct^{\frac{1}{\alpha-q}} (\log t)^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha-q}}\right)} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

(2) ある $p > 0$ に対して

$$c(x, y) \asymp \left(1 \wedge \frac{1}{|x|^p}\right) \left(1 \wedge \frac{1}{|y|^p}\right)$$

ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{ct^{\frac{2+p}{2(\alpha+p)}} (\log t)^{\frac{(1+\varepsilon)(2+p)}{2(\alpha+p)}}} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

ここで, 任意の $p > 0$ について

$$\frac{2+p}{2(\alpha+p)} < \frac{1}{\alpha}$$

を注意する. この不等式より, 粒子の広がり具合が対称安定過程に比べ遅いことが分かる.

参考文献

- 対称拡散過程の脱出レートに関する論文

- [G99] A. Grigor'yan, Escape rate of Brownian motion on Riemannian manifolds, *Appl. Anal.* **71** (1999), 63–89.
- [GH09] A. Grigor'yan and E. Hsu, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a Cartan-Hadamard manifold, Sobolev spaces in mathematics. II, Int. Math. Ser. (N.Y.), **9**, 209–225, Springer, New York, 2009.
- [HQ10] E. Hsu and G. Qin, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a complete Riemannian manifold, *Ann. Probab.* **38** (2010), 1570–1582.
- [O] S. Ouyang, Volume growth, comparison theorem and escape rate of diffusion process, preprint.

- 対称飛躍（拡散）型マルコフ過程の保存性に関する論文

- [GHM11] A. Grigor'yan, X. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, *Math. Z.* **27** (2012), 1211–1239.
- [MU11] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47** (2011), 650–662.
- [MUW12] J. Masamune, T. Uemura and J. Wang, On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions, *J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3984–4008.
- [S] Y. Shiozawa, Conservation property of symmetric jump-diffusion processes, to appear in *Forum Math.*
- [SU] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on $\mathbb{R}^d$, *J. Theoret. Probab.* **27** (2014), 404–432

- 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の保存性／脱出レートに関する論文

- [F] M. Folz, Volume growth and stochastic completeness of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 2089–2119.
- [H1] X. Huang, Escape rate of Markov chains on infinite graphs, *J. Theoret. Probab.* **27** (2014), 634–682.
- [H2] X. Huang, A note on the volume growth criterion for stochastic completeness of weighted graphs, *Potential Anal.* **40** (2014), 117–142.
- [HS14] X. Huang and Y. Shiozawa, Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs, *Stochastic Processes Appl.* **124** (2014), 317–347.