

Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions

牛越恵理佳 (玉川大学工学部) ¹

アダマール変分公式とは、領域に依存して決まる関数が領域摂動に伴いどのような変化をするかを表した等式である。Hadamard [2] により、ラプラス作用素の第一固有値に対する変分公式が単調な領域摂動のもと導出され、その後、Garabedian-Schiffer [1] において、一般の正則な摂動へ拡張された。本講演では、一般の正則な摂動条件のもと、ストークス作用素の重複度のある固有値に対するアダマール変分公式の導出を行う。まずは主定理を述べるために必要な仮定について言及する。

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつとする。非負の実数 ε を 1 径数の族として持つ微分同相写像 $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ によって、 $\bar{\Omega}$ に摂動を施した領域を $\bar{\Omega}_\varepsilon := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n; \tilde{x} = \Phi_\varepsilon(x), x \in \bar{\Omega}\}$ とする。ここで、微分同相写像 Φ_ε は次の 2 つの性質を持つものとする。

仮定

(A.1) 任意の $\varepsilon \geq 0$ に対し、 $\Phi_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})^n$ であり、 $\Phi_0(x) = x$ が全ての $x \in \bar{\Omega}$ で成り立つ。

(A.2) ある $S \in C^\infty(\bar{\Omega})^n$ が存在して、 $R_j(x; \varepsilon) := \Phi_{\varepsilon,j}(x) - x - \varepsilon S_j(x)$ とおくとき、剰余項 $R_j(x; \varepsilon)$ に対して、 $\sup_{x \in \bar{\Omega}} |R_j(x; \varepsilon)| + \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla R_j(x; \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, as $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, n$ が成り立つ。

このような領域摂動のもと、 Ω_ε におけるディリクレ境界条件を課したストークス方程式の固有値問題を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{V}_\varepsilon + \nabla P_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) \mathbf{V}_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} \mathbf{V}_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{V}_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

この問題の第 k 固有値を $\lambda_k(\varepsilon)$ 、流体の速度および圧力を表す固有関数をそれぞれ $\mathbf{V}_\varepsilon$ および P_ε と表す。さらに、 Ω 上の固有値 λ_k は重複度 n_k をもち、

$$\dots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+n_k-1} < \lambda_{k+n_k} \leq \dots$$

と並べるとする。このとき、次の変分公式が得られる。

定理 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d \geq 2)$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする。 $0 \leq \varepsilon \ll 1$ を 1 径数とした、微分同相写像 $\Phi_\varepsilon(\cdot); \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_\varepsilon$ は仮定を満たすものとする。すべての $k \leq l \leq k + n_k - 1$ に対して、 $\delta\lambda_l := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(\lambda_l(\varepsilon) - \lambda_l)$ が存在し、 $\delta\lambda_l$ ($k \leq l \leq k + n_k - 1$) は、実対称行列

$$\left(- \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{l_1}^i}{\partial \nu_x}(x) \frac{\partial V_{l_2}^i}{\partial \nu_x}(x) (S(x) \cdot \nu_x) d\sigma_x \right)_{k \leq l_1, l_2 \leq k+n_k-1}$$

¹本講演は、神保秀一氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

の固有値である. ここで, $\{\mathbf{V}_l\}_{l=k}^{k+n_k-1}$ は第 k 固有値に対する固有関数であり, $\nu_x = (\nu_x^1, \dots, \nu_x^d)$ は $\partial\Omega$ における外向き法線ベクトル, σ_x は $\partial\Omega$ の面積要素を表す.

注意. (i) 特に, λ_k が単純固有値の場合 $\delta\lambda_k$ は,

$$\delta\lambda_k = - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V_k^i}{\partial \nu_x}(x) \right)^2 (S(x) \cdot \nu_x) d\sigma_x.$$

と表せる.

(ii) $\varepsilon \uparrow 0$ の場合においても, 同様な議論が可能で極限值 $\delta\lambda_l := \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \varepsilon^{-1}(\lambda_l(\varepsilon) - \lambda_l)$ ($k \leq l \leq k + n_k - 1$) の存在は保証することができるが, $\varepsilon \downarrow 0$ の場合の極限值と一般には一致しない.

(iii) ストークス方程式に対する領域摂動問題を考察した先行結果 [3] や [4] における体積保存の条件を緩和することに成功した.

参考文献

- [1] Garabedian, P. R., Schiffer, M., *Convexity of domain functionals*, J.Analyse Math., **2** (1953), 281–368.
- [2] Hadamard, J., *Mémoire sur le probleme d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées*, Memoires des Savants Etrangers, vol.33 (1908) (cf. Oeuvres, De Jacques Hadamard Tom II, Centre National de la Recherche Scientifiques **2**, Anatole France, 1968, 515–631).
- [3] Kozono, H., Ushikoshi, E., *Hadamard variational formula for the Green function of the boundary value problem on the Stokes equations*, Arch. Rational Mech., **208** (2013), 1005–1055.
- [4] Ushikoshi, E., *Hadamard variational formula for the Green function for the velocity and pressure of the Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J., **62** (2013), 1315–1379.