空間切断の入った複素スカラー場の自己相互作用模型における基底状態の存在

和田　和幸 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

1 導入

複素クライン-ゴルドン方程式を満たす場 (複素スカラー場) に, 自己相互作用を入れた場合の物理系とヒッグス型ポテンシャルを入れた物理系を含んだハミルトニアンを考える. 量子化された複素スカラー場は無数の粒子と反粒子によって構成され, 相互作用により粒子や反粒子らは生成, 消滅を絶えず繰り返す描像を与える. $d \in \mathbb{N}$ を空間の次元とする. 今回考察するハミルトニアン H は以下のものである.

$$H := \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega) + \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathrm{sp}}(x)\big(\mu\phi(f_x)^*\phi(f_x) + \lambda(\phi(f_x)^*\phi(f_x))^2\big)\mathrm{d}x.$$

この線形作用素は $L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間, すなわち

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)) := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \otimes_s^n (L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)) \tag{1}$$

で実現される. この H の対して次の問を考える: 1)H はいつ自己共役作用素になるか? 2)H が下に有界ならばスペクトルの下限はいつ H の固有値となっているか? 2) はタイトルにもあるようにいわゆる基底状態の存在の問題である. 本講演ではこの 2 つの問に対し十分条件を与える事が目的である. ここで, 場の量子論の数学的な枠組みにおいてよく登場する記号や本講演で用いる記号等を確認しておく.

ω を $\omega(k) := |k|$ による掛け算作用素とする. ω は粒子や反粒子 1 個のハミルトニアンを表す. $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega)$ は $\omega \oplus \omega$ の第二量子化作用素と呼ばれ

$$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega) := 0 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_{j=1}^{d} 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{(\omega \oplus \omega)}_{j-th} \otimes \cdots \otimes 1} \tag{2}$$

で定義される非負の自己共役作用素である. $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega)$ は粒子と反粒子がそれぞれ無数にいるが, 全く相互作用をしていない物理系を表現する. $\chi_{\mathrm{sp}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ は非負の可測関数で " 空間切断" と呼ばれる. 通常物理では空間切断は入っていないが, 数学的に模型を定義する際には必要となる. $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ は結合定数を表す.

$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し, $A((f,g))$ でボソンフォック空間上の消滅作用素, $A((f,g))^*$ で生成作用素を表すものとする. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し, 作用素 $a_{\pm}(f)$, $a_{\pm}(f)^*$ を次で導入する.

$$a_+(f) := A((f,0)),\quad a_-(f) := A((0,f)),\quad a_+(f)^* := A((f,0))^*,\quad a_-(f)^* := A((0,f))^*.$$

これらの作用素は特徴的な正準交換関係を満たす事が知られている．$D(A)$ で作用素 A の定義域を表す．$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を次の性質を満たすものと仮定する．

仮定 1. $|\varphi(k)| = |\varphi(-k)|$, a.e.$k \in \mathbb{R}^d$. $\varphi \in D(\omega^{1/2}) \cap D(\omega^{-1/2})$.

$x \in \mathbb{R}^d$ に対し, 場の作用素 $\phi(f_x)$ を次で定める．

$$\phi(f_x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+(f_x) + a_-(f_x)^*), \quad f_x(k) := \frac{\varphi(k)}{\sqrt{\omega(k)}} e^{-ik\cdot x}, \quad \text{a.e.} k \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega)$ の性質はよく知られており, 特に次のベクトル

$$\Omega := \{1, 0, 0, \dots\} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)) \tag{4}$$

は $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus \omega)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルとなっている．Ω は『粒子も反粒子も全くいない状態』を表しており, 相互作用の無い場合の基底状態となっている．そこに (1) の積分項のような摂動が加えられた場合, H の性質（主にスペクトル）がどのようになるかは線形作用素の摂動問題の観点から興味のある問題である．次節で最初に述べた 1),2) の問題に対する結果を述べる．

2 主結果

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を無限回微分可能で, コンパクトな台を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の関数の全体とする．$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元により生成される有限粒子空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}$ と書く．これは $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の稠密な部分空間となる．

定理 1. 仮定 1 の下, H は下に有界な自己共役作用素であり, $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}$ 上で本質的自己共役作用素である．

この定理は [7] の手法を応用する事により示される．まず無限直和型のヒルベルト空間上で作用する線形作用素に対する本質的自己共役性の判別条件 [2] を用いて, H の本質的自己共役性を示す．その後, 積分項が H に対して相対有界である事を示すのである．次に 2) について考える．基底状態の存在については Glimm-Jaffe[5] により, 実スカラー場で $\mu = 0$, $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $(m > 0)$ の場合が考察されている．高江洲 [8] により実スカラー場で $\mu = 0$, $\omega(k) = |k|$ の場合が最近報告された．Gérard[4] は複素スカラー場で $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ の場合を考察した．[4] では正準交換関係や散乱理論についても議論されている．m は粒子と反粒子の質量を表すパラメータである．$m = 0$ の場合は $m > 0$ の場合に比べて基底状態に関する解析が著しく難しくなる事が知られている．本講演の結果は Gérard の結果を質量 0 への場合に拡張したものである．H の基底状態について考察する為に以下の仮定を設ける．

仮定 2.

1, φ は回転不変でコンパクトな台を持つ関数である．

2, 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ が存在して, supp φ=$\overline{\Omega}$. また Ω 上で φ は連続微分可能.

3, $\varphi \in D(\omega^{-5/2})$, $\nabla\varphi \in D(\omega^{-3/2})$.

4, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)\chi_{\mathrm{sp}}(x)\mathrm{d}x<\infty$.

次の定理が主結果である.

定理 2. 上の仮定の下, 任意の $\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ に対して H は基底状態を持つ.

注意. 仮定 1 に加えて, $\varphi\in D(\omega^{-3/2})$ の条件のみを仮定すると, $|\mu|$, λ が『非常に小さい』時に基底状態が存在する事のみが示される.

この証明のアイデアは, まず質量が入ったハミルトニアン H_m で基底状態の存在を示す. 質量が入った場合の基底状態の存在は仮定 1 のみがあれば示す事が出来る. H_m の基底状態の存在では, 1 の分解を用いて半径 $R(>0)$ の内部部分と半径 R より外の部分に粒子と反粒子を分ける議論を行う [3]. 証明で一番大事な部分は H_m の基底状態を Φ_m とした時, $\{\Phi_m\}_{m>0}$ があるソボレフ空間の族になる事を示し, Rellich- Kondrachov の定理を応用する点にある. この際に仮定 2 が必要となる. この手法の大元は [6] で導入されたものであり, それを今回考察する H に対し応用したものである.

フォック空間に関する純数学的な理論は [1] に詳しい. 場の量子論に関わる数学的な諸問題のレヴューは [8] を参照されたい.

参考文献

[1] 新井 朝雄, "フォック空間と量子場", 日本評論社, 東京, 2000.

[2] A. Arai, "A theorem on essential self-adjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory", J. Math. Phys. **32**, 2082-2088, (1991).

[3] J. Dereziński, C. Gérard, "Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians", Rev. Math. Phys. **11**, 383-450, (1999).

[4] C. Gérard, "Spectral and Scattering Theory of Space-cutoff Charged $P(\varphi)_2$ Models", Lett. Math. Phys, **92**, 197-220, (2010).

[5] J. Glimm, A. Jaffe, "The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs II", Ann. of Math. (2), **91**, 362-401, (1970).

[6] M. Griesemer, E. H. Lieb, M. Loss, "Ground states in nonrelativistic quantum electrodynamics", Invent. Math. **145**, 557-595, (2001).

[7] T. Hidaka, "Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation", J. Math. Phys., **52**, 022102, (2011).

[8] 廣島 文生, " 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題", 数学, vol.57, no.1, 70-92, 2005.

[9] 高江洲 俊光, "切断関数が加わった massless ϕ^4 モデルの任意の結合定数での基底状態の存在について", 日本数学会 2014 年度年会 関数解析学分科会. 学習院大学.

[10] K. Wada, "Spectral analysis of a massless charged scalar field with spacial cut-off ", arXiv:1405.3773 [math-ph] (2014).