

Stability of semitrivial solutions of Schrödinger-KdV system

藤本 佳 (東京理大・理 M2)

本講演では、次の Schrödinger-KdV 方程式系について考察する:

$$(SKdV) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + uv = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \partial_x(a\partial_x^2 v + bv^2 + |u|^2) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで、 u は複素数値の未知関数、 v は実数値の未知関数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $a, b > 0$ である。(SKdV) は水面波やプラズマなどの長波と短波の相互作用を記述した方程式である ([3] 参照). エネルギー空間 $X := H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ における (SKdV) の初期値問題の時間大域解の存在と一意性は [2] で示されている.

定義 1. $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^2$ とする. また、 $s = (s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$ と $(u, v) \in X$ に対して、

$$T(s)(u, v)(x) = (e^{is_0}u(x - s_1), v(x - s_1))$$

とおく. $T(\omega t)(\phi_\omega, \psi_\omega)$ の形をした (SKdV) の解を孤立波解と呼ぶ.

定義 2. (SKdV) の孤立波解 $T(\omega t)(\phi_\omega, \psi_\omega)$ は軌道安定である

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $(u_0, v_0) \in X$ が $\|(u_0, v_0) - (\phi_\omega, \psi_\omega)\|_X < \delta$ を満たすならば (u_0, v_0) を初期値とする (SKdV) の解 $(u(t), v(t))$ は

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{s \in \mathbb{R}^2} \|(u(t), v(t)) - T(s)(\phi_\omega, \psi_\omega)\|_X < \varepsilon$$

を満たす.

本講演では、(SKdV) の半自明解 $(u(t, x), v(t, x)) = (0, \psi_{\omega_1}(x - \omega_1 t))$ の軌道安定性に関する結果が得られた. ここで、 $\omega_1 > 0$ であり、 $\psi_{\omega_1} \in H^1(\mathbb{R})$ は方程式

$$-a\psi'' + \omega_1\psi - b\psi^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

の解であり、正值偶関数解であれば、次のように表せる:

$$\psi_{\omega_1}(x) = \frac{3\omega_1}{2b} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{a}} x \right).$$

主定理. 任意の $\omega_1 > 0$ に対して、(SKdV) の半自明解 $(0, \psi_{\omega_1}(x - \omega_1 t))$ は軌道安定である.

この定理は [1, Theorem 2] の証明に基づく.

参考文献

- [1] M. Colin, T. Colin, and M. Ohta, *Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), 2211-2226.
- [2] A. J. Corcho, F. Linares, *Well-posedness for the Schrödinger-Korteweg-de Vries system*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no.9, 4089-4106.
- [3] 吉永 隆夫, 長波-短波相互作用による水波のカオス現象, 日本物理学会誌 47 巻 (1992), 4 号, 300-303.