

リーマン多様体における平均曲率流の 無限次元線形空間へのリフトについて

小池直之 (東京理科大・理)

リーマンヒルベルト部分多様体論の代表的研究の1つとして、ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究が挙げられる。コンパクトリーマン多様体 M 上のコンパクトリー群 G を構造群とする主バンドル P の H^0 接続の空間 $\mathcal{C}_P$ (これはリーマンヒルベルト多様体) 内で、各ゲージ軌道 $\mathcal{G}_P \cdot \omega$ ($\mathcal{G}_P : P$ のゲージ群) はヒルベルト部分多様体であり、いくつかのゲージ軌道は正則化された平均曲率ベクトル場をもつ。例えば、平坦な H^0 接続を通るゲージ軌道、 $\dim M = 4$ の場合の Yang-Mills H^0 接続を通るゲージ軌道、および、 G がアーベル群のときの任意のゲージ軌道は、正則化された平均曲率ベクトル場をもつ ([MRT])。しかしながら、一般には、ゲージ軌道は正則化された平均曲率ベクトル場をもつとは限らず、それゆえ、ゲージ軌道を発する正則化された平均曲率流は定義されとは限らない。しかしながら、平坦な H^0 接続を通るゲージ軌道に対しては、それを発する正則化された平均曲率流が定義され、それは平坦な H^0 接続の空間 $\mathcal{FC}_P$ 内を流れることが示される。 $M = [0, 1]$, $P = [0, 1] \times G$ (自明な G バンドル) の場合、 $\mathcal{C}_P = \mathcal{FC}_P = H^0([0, 1], \mathfrak{g})$, $\mathcal{G}_P = H^1([0, 1], G)$ となり、 $\mathcal{G}_P$ は $\mathcal{C}_P$ に推移的に作用する、つまり、 $\mathcal{C}_P = \mathcal{G}_P \cdot \omega (\approx \mathcal{G}_P / (\mathcal{G}_P)_\omega)$ ($\forall \omega \in \mathcal{C}_P$) となる。それゆえ、この場合、軌道空間 $\mathcal{C}_P / \mathcal{G}_P$ は1点集合になるので、その部分リー群作用を考えることは自然であり、その一つとしてループ群 $\Omega_e(G) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid g(0) = g(1) = e\}$ の作用を考える。この作用は自由な作用であり、その軌道空間は G になり、軌道写像 ϕ は G 上の $\Omega_e(G)$ バンドルになる。この作用は等長的なので、 ϕ がリーマン沈め込みとなるようなリーマン計量が G に誘導され、しかも、このリーマン計量は両側不変計量 (それゆえ、非負曲率をもつ計量) になることが示される。また、各 $\Omega_e(G)$ 軌道 (つまり、 ϕ のファイバー) は正則化可能な固有フレッドホルム部分多様体であり、その正則化された平均曲率ベクトル場は0になる、つまり、極小になることが示される。ここで、固有フレッドホルム部分多様体の概念は C.L. Terng ([T]) によって導入され、その正則化可能性は、E. Heintze, X. Liu と C. Olmos ([HLO]) によって定義されたものを採用していることを注意しておく。これらの事実から、 $\Omega_e(G)$ 軌道、あるいはより一般に、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ 内の $\Omega_e(G)$ 不変な部分多様体の正則化された平均曲率ベクトル場が定義されること、さらに、 $\Omega_e(G)$ 不変な部分多様体でコンパクト商をもつものを発する正則化された平均曲率流が短時間において存在することが示される。ファイバーの極小性から、 G 内のコンパクト部分多様体を発する平均曲率流の研究は、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ 内の $\Omega_e(G)$ 不変な正則化可能な固有フレッドホルム部分多様体でコンパクト商をもつものを発する正則化された平均曲率流の研究に還元されることがわかる。

一般に、ヒルベルト空間 V から有限次元リーマン部分多様体 N への極小ファイバーをもつリーマン沈め込み ϕ が存在するとき、この沈め込みを通じて N 内のコンパクト部分多様体を発する平均曲率流の研究を、 V 内の $\mathfrak{F}_\phi$ -saturated 部分多様体でコンパクトな射影像 (ϕ による像) をもつものを発する正則化された平均曲率流の研究に還元することができる。ここで、 $\mathfrak{F}_\phi$ は、 ϕ のファイバーからなる葉層構造を表す。この研究方法は、 N が曲率をもつ空間であるのに比べ、 V は (無限次元ではあるが) 平坦な線形空間であるという面で有効であるように思われる (この研究方法を有効利用した研究については、[K1] を参照)。

今回、より一般に、ヒルベルト空間 V から有限次元リーマンオービフォールド $(N, \tilde{g})$ への極小ファイバーをもつリーマンオービ沈め込み ϕ に対して、 $\mathfrak{F}_\phi$ -saturated 超曲面でコンパクトな射影像をもつ

ものを発する正則化された平均曲率流を研究した． $\dim N = n + 1$ とする． $\bar{M}$ を n 次元コンパクトオービフォールドとし， $\bar{f} : \bar{M} \hookrightarrow N$ を C^∞ オービはめ込みとし， $\{\bar{f}_t\}_{t \in [0, T]}$ を $\bar{f}$ を発する (つまり， $\bar{f}_0 = \bar{f}$) 平均曲率流とする． つまり， 各 $\bar{f}_t$ は C^∞ オービはめ込みであり， 次の発展方程式を満たすものとする：

$$(MCF) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \bar{H}_t$$

ここで， $\bar{F}$ は $\bar{F}(x, t) := \bar{f}_t(x)$ によって定義される $\bar{M} \times [0, T]$ から N への写像を表し， $\bar{H}_t$ は $\bar{f}_t$ の平均曲率ベクトル場を表す． $\bar{H}_t$ は， ある非線形 2 階偏微分作用素 D_t を用いて $\bar{H}_t = D_t(\bar{f}_t)$ と表され， (MCF) は， R.S. Hamilton([Ha]) の意味の quasi-parabolic 非線形偏微分方程式となる． 特に， N が平坦なときは， $D_t = \bar{\Delta}_t$ となる． ここで， $\bar{\Delta}_t$ は， $\bar{f}_t$ による誘導オービ計量 $\bar{g}_t$ の (ラフ) ラプラシアンを表す． $M := \bigcup_{x \in \bar{M}} (\{x\} \times \phi^{-1}(f(x)))$ とし， $f_t : M \hookrightarrow V$ ($t \in [0, T]$) を $f_t(x, u) := (c_x)_u^L(t)$ ($(x, u) \in M$) によって定義する． ここで， c_x は $c_x(t) := \bar{f}_t(x)$ によって定義される N 上の曲線を表し， $(c_x)_u^L$ は， c_x の u を発する水平リフトを表す． このとき， $f_t(M) = \phi^{-1}(\bar{f}_t(\bar{M}))$ となり， $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$ は， 正則化された平均曲率流になる． つまり， 次の発展方程式を満たす：

$$(RMCF) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H_t$$

ここで， F は $F((x, u), t) := f_t(x, u)$ によって定義される $M \times [0, T]$ から V への写像を表し， H_t は f_t の正則化された平均曲率ベクトル場を表す． g_t を f_t によって誘導される M 上の誘導計量とし， ∇^t を g_t のリーマン接続とする． H_t は， f_t の ∇^t を用いて定義される正則化されたラフラプラシアン $\Delta_t^r f_t$ に等しいことを注意しておく． f_t の形作用素， 第 2 基本形式， 正則化された平均曲率ベクトル場を， 各々， A_t, h_t, H_t で表す． π_M を $M \times [0, T]$ から M への自然な射影とし， A_t 達から得られる誘導バンドル $\pi_M^*(T^{(1,1)}M)$ の切断を A とし， g_t, h_t 達から得られる $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$ の切断を g, h とし， H_t 達から得られる F^*TV の切断を H で表す． また， $\phi, \phi \circ f_t$ の水平分布を， 各々， $\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}_t$ で表し， $\mathcal{H}_t$ から得られる $M \times [0, T]$ 上の接分布 (より詳しくは， π_M^*TM の部分バンドル) を $\mathcal{H}$ で表す． $\text{pr}_{\mathcal{H}}$ を， $\pi_M^*(TM)$ から $\mathcal{H}$ へのバンドル直交射影として， g, h, A の水平成分 $g_{\mathcal{H}}, h_{\mathcal{H}}, A_{\mathcal{H}}$ を， 各々， $g_{\mathcal{H}} := g \circ (\text{pr}_{\mathcal{H}} \times \text{pr}_{\mathcal{H}})$ ， $h_{\mathcal{H}} := h \circ (\text{pr}_{\mathcal{H}} \times \text{pr}_{\mathcal{H}})$ ， $A_{\mathcal{H}} := \text{pr}_{\mathcal{H}} \circ A \circ \text{pr}_{\mathcal{H}}$ によって定義する． また， ∇^t 達から誘導される $\mathcal{H}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{H}}$ を用いて定義されるラフラプラス作用素を $\Delta_{\mathcal{H}}$ で表す． [K3] において， これらの幾何学量が満たす発展方程式を得た ([K2] も参照)．

定理 1([K3]). $g_{\mathcal{H}}, h_{\mathcal{H}}, \|H\|$ は， 各々， 次の発展方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mathcal{H}}}{\partial t} &= -2\|H\|h_{\mathcal{H}}, & \frac{\partial \|H\|}{\partial t} &= \Delta_{\mathcal{H}}\|H\| + \|H\|\text{Tr}(A_{\mathcal{H}})^2 - 3\|H\|\text{Tr}((A_{\mathcal{H}}^\phi)^2)_{\mathcal{H}} \\ \frac{\partial h_{\mathcal{H}}}{\partial t}(X, Y) &= (\Delta_{\mathcal{H}}h_{\mathcal{H}})(X, Y) - 2\|H\|h_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}X, Y) - 2\|H\|g_{\mathcal{H}}((A_{\mathcal{H}}^\phi)^2(X), Y) \\ &\quad + \text{Tr}\left((A_{\mathcal{H}})^2 - (A_{\mathcal{H}}^\phi)^2\right)h(X, Y) - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}X, A_{\mathcal{H}}Y) \\ &\quad - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}X), Y) - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}Y), X) \\ &\quad - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h((\nabla \bullet A)_{\bullet}X, Y) - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h((\nabla \bullet A)_{\bullet}Y, X) \\ &\quad - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet (\nabla \bullet h)(A_{\mathcal{H}}X, Y) - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet (\nabla \bullet h)(A_{\mathcal{H}}Y, X) \quad (X, Y \in \mathcal{H}) \end{aligned}$$

A^ϕ は， リーマン沈めこみ $\phi : V \rightarrow N$ の O'Neill の基本テンソル場 (水平分布の積分可能性の障害度を表すもの) を表し， $\mathcal{A}$ は， $\phi \circ f_t : M \rightarrow \phi(M)$ の O'Neill の基本テンソル場達から得られるテンソル場を表す (これらのテンソル場は， 有限次元リーマン多様体間のリーマン沈めこみの場合に O'Neill([O]) によって定義されたものと同様に定義される)． また， $\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}X, A_{\mathcal{H}}Y)$ は， $\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}X, A_{\mathcal{H}}Y) := \sum_{i=1}^n h(A_{e_i}X, A_{e_i}Y)$ ($\{e_1, \dots, e_n\} : \mathcal{H}$ の $g_{\mathcal{H}}$ に関する正規直交基底) によって定義され， $\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h(A_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}X), Y)$ ， $\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^\bullet h((\nabla \bullet A)_{\bullet}X, Y)$ 等も， 同様に定義される．

(注1) $\mathcal{A}^\phi$, $\mathcal{A}$ は, $\phi, \phi \circ \tilde{f}_t$ が主バンドルであるとき, 水平分布をその接続とみなしたときの曲率形式と (各鉛直空間を構造群のリー代数との自然な同一視の下) 同一視される.

(注2) $(N, \tilde{g})$ は非負曲率をもつことがわかる. 特に, $(N, \tilde{g})$ が平坦であるとき, $\mathcal{A}^\phi = 0$, $\mathcal{A} = 0$ となり, $h_{\mathcal{H}}, \|H\|$ が満たす上述の発展方程式の右辺における後半部の項達は消える.

ここで, ヒルベルト空間から有限次元リーマンオービフォールドへの極小ファイバーをもつリーマンオービ沈め込みの例を与える.

例 G をコンパクト半単純リー群とし, K, Γ を, 各々, G の閉部分リー群, 有限部分群とする. また, G, K のリー代数を, 各々, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表し, $\mathfrak{g}$ のキリング形式を B で表すことにする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が簡約分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を許容するとする. $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ に B に関する L^2 内積を与える. ヒルベルトリー群 $H^1([0, 1], G)$ は, ヒルベルト空間 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ にゲージ変換の接続への作用として次のように作用する:

$$(a * u)(t) = \text{Ad}_G(a(t))(u(t)) - (R_{a(t)})_*^{-1}(a'(t)) \quad (a \in H^1([0, 1], G), u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})),$$

ここで, Ad_G は G の随伴作用を表し, $R_{a(t)}$ は $a(t) \in G$ による右移動を表し, a' は a の弱微分を表す. $H^1([0, 1], G)$ のヒルベルトリー部分群

$$P(G, \Gamma \times K) := \{a \in H^1([0, 1], G) \mid (a(0), a(1)) \in \Gamma \times K\}$$

は, $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ に概自由かつ等長的に作用し, 軌道空間 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})/P(G, \Gamma \times K)$ は, オービフォールド $\Gamma \backslash G/K$ にオービ微分同相になり, この軌道空間に ϕ を通じて誘導されるオービ計量は, B の定める G の両側不変計量から誘導されるものと一致する. さらに, この作用の各軌道は極小な正則化可能な固有フレッドホルム部分多様体になることがわかる.

M を, 各軌道が正則化可能な固有フレッドホルム部分多様体であるようなヒルベルトリー群 $\tilde{G}$ の概自由な等長作用を備えたヒルベルト多様体とし, $\mathcal{H}$ をその作用の水平分布とする. 今回得た結果のもう1つは, M 上の $\tilde{G}$ 不変な対称2次共変テンソル場の1パラメーター族 $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ に関する次の Hamilton 型の最大値原理である.

定理 2([K3]) $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ が次の発展方程式を満たしているとする:

$$\frac{\partial S_{\mathcal{H}}}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}} + \nabla_{X_0}^{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}} + P(S)_{\mathcal{H}}$$

ここで, X_0 は $\pi_M^*(TM)$ のある元であり, P は, $\Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ からそれ自身への多項式型写像で, 次の零ベクトル条件を満たすものとする:

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall (x, t) \in \tilde{M} \times [0, T)) [X \in \text{Ker}((S + \varepsilon g)_{\mathcal{H}})_{(x, t)} \Rightarrow P(S + \varepsilon g)_{(x, t)}(X, X) \geq 0]$$

このとき, $(S_0)_{\mathcal{H}} \geq 0$ (resp. > 0) ならば, 各 $t \in [0, T]$ に対して, $(S_t)_{\mathcal{H}} \geq 0$ (resp. > 0) が成り立つ.

$\tilde{G} \curvearrowright V$ を各軌道が極小な正則化可能な固有フレッドホルム部分多様体であるようなヒルベルトリー群 $\tilde{G}$ の概自由な等長作用とし, $\phi: V \rightarrow V/\tilde{G}$ をその軌道写像とする. $N := V/\tilde{G}$, $n := \dim N - 1$ とする. $M \subset V$ を $\tilde{G}$ 不変な超曲面でコンパクトな射影像をもつものとする. f を M から V への包含写像とし, $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$ を f を発する正則化された平均曲率流とする. このとき, 各 f_t が $\tilde{G}$ 同変

になることを注意しておく．以下， f_{t*} を省略する． L を次式によって定義する：

$$L := \sup_{u \in V(X_1, \dots, X_5) \in (\tilde{\mathcal{H}}_1)_u^5} |\langle \mathcal{A}_{X_1}^\phi((\tilde{\nabla}_{X_2} \mathcal{A}^\phi)_{X_3} X_4), X_5 \rangle|.$$

ここで， $\tilde{\mathcal{H}}_1$ は $\{X \in \tilde{\mathcal{H}} \mid \|X\| = 1\}$ を表す． $L < \infty$ であると仮定する ($V/\tilde{G}$ がコンパクトである場合， $L < \infty$ となる)．このとき，定理 1,2 を用いて，次の水平強凸性保存性定理を示すことができる．

定理 3([K3]) $\|H_0\|^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} > 2n^2 L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}$ ならば， $T < \infty$ であり，各 $t \in [0, T)$ に対して，

$$\|H_t\|^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)} > 2n^2 L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)}$$

が成り立つ．

この結果は，G. Huisken([Hu1,2]) による完備リーマン多様体における平均曲率流に沿う強 (ホロ球面的) 凸性保存性定理に類似するものである．

最後に，今後の研究計画について述べる．次の問題が自然と生ずる．

問題． 定理 3 の条件下で， $t \uparrow T$ のとき， $f_t(M)$ は ϕ の 1 つのファイバーに崩壊するのか？

この問題を， $\tilde{G}$ 不変な様々な M 上の幾何学量に対する積分不等式 (積分領域は $\bar{M} = \phi(M)$) を求め，それらを用いてこの問題を肯定的に解決したいと考えている．

参考文献

- [Ha] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **17** (1982) 255-306.
- [HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom. **20** (1984) 237-266.
- [Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, Invent. Math. **84** (1986) 463-480.
- [O] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J. **13** (1966) 459-469.
- [K1] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian J. Math. **15** (2011) 101-128.
- [K2] N. Koike, The Regularized Mean Curvature Flow for Invariant Hypersurfaces in a Hilbert Space, Seoul ICM 2014, Satellite Conference on Real and Complex submanifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **106** pp. 437-452, 2014.
- [K3] N. Koike, The mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space with an almost free group action, arXiv:1210.2539v4[math.DG].
- [MRT] Y. Maeda, S. Rosenberg and P. Tondeur, The mean curvature of gauge orbits, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck) Publish or Perish, Houston, TX (1993) 171-217.
- [T] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geometry **29** (1989) 9-47.