波束変換を用いたSchrödinger方程式の解のStrichartz型ノルム評価[1]

小嶋　直樹　(東京理科大学 修士2年)

本研究では, 以下のSchrödinger方程式の初期値問題を考える.

$$(1)\quad \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで, $i=\sqrt{-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ である. $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ のとき, 各 $t\in\mathbb{R}$ で $u(t,\cdot)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ となる (1) の解は以下で表せる.

$$u(t,x) = (e^{\frac{1}{2}it\Delta}u)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}\mathcal{F}u_0(\xi)](x).$$

定義 1. (波束変換) $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする. このとき $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

で定める.

定義 2. (Modulation 空間) $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする. このとき $1\le p,q\le\infty$ に対して Modulation 空間 $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する.

$$M^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \|f\|_{M^{p,q}_\varphi} := \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W_\varphi f(x,\xi)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} d\xi\right)^{\frac{1}{q}} = \|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L^p_x L^q_\xi} < \infty \right\}.$$

定義 3. (admissible pair)
組 (p,r) が以下を満たすとき, admissible pair とよぶ:
$2\le p,r\le\infty,\ (p,r,n)\neq(2,\infty,2),\ \dfrac{1}{r}+\dfrac{n}{2p}\le\dfrac{n}{4}.$

(1) の解に現れる自由 Schrödinger 作用素 $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ を $U(t)$ とおくと, 初期値 u_0 に対して次が成り立つことが知られている [1], [2]:

命題 1. [Bényi - Gröchenig - Okooudjou - Rogers(2007) [1]] $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $1\le q\le\infty$ に対し, ある定数 $C_1>0$, $C_2>0$ があって, 任意の $u_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|U(t)u_0\|_{M^{2,q}_\varphi} \le C_1\|u_0\|_{M^{2,q}_\varphi},$$
$$\|U(-s)U(t)u_0\|_{M^{\infty,q}_\varphi} \le C_2(1+|t-s|)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{M^{1,q}_\varphi}$$

が成り立つ.

命題 2. [K. Kato - M. Kobayashi - S.Ito(2012) [2]] 任意の $u_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 自由粒子の Schrödinger 作用素を波束変換で表すと,

$$W_{\varphi(s)}\left[U(s)u_0\right](x,\xi) = e^{-\frac{1}{2}is|\xi|^2} W_\varphi u_0(x-s\xi,\xi).$$

ここで, $\varphi(s) = e^{\frac{1}{2}is\Delta}\varphi$.

定理 3. [C. Zhang (2013) [3]] $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $1\le q\le\infty$ とする. admissible pair (p,r) に対し, ある定数 $C>0$, $C'>0$ があって, 任意の $u_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $F\in L^{r'}(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ に対して,

$$\|U(t)u_0\|_{M^{p,q}_\varphi L^r_t} \le C\|u_0\|_{M^{2,q}_\varphi},$$
$$\left\|\int_{\mathbb{R}} U(-s)F(s)ds\right\|_{M^{2,q}_\varphi} \le C'\|F\|_{M^{p',q}_\varphi L^{r'}_t}$$

が成り立つ. ただし, p', r' はそれぞれ $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=1$ で, $\|F\|_{M^{p,q}_\varphi L^r_t} = \left\|\|F\|_{M^{p,q}_\varphi}\right\|_{L^r_t}$ である.

本研究では, 波束変換を用いることで先行研究 [C. Zhang] の $(p,r)\neq\left(\frac{2n}{n-2},2\right)$ の場合での別証明を与えた.

[1] 本研究は指導教員である加藤圭一先生との共同研究によるものです.

References

[1] Benyi, Arpad; Grochenig, Karlheinz; Okoudjou, Kasso A.; Rogers, Luke G. Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces. J. Funct. Anal. 246 (2007), no. 2, 366–384.

[2] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. (2) Volume 64, Number 2 (2012), 223–231.

[3] C. Zhang, Strichartz estimates in the frame of modulation spaces, Nonlinear Anal. 78 (2013), 156–167.