

Neumann 境界条件付 Allen-Cahn 方程式の特異極限と平均曲率流

水野 将司 (日本大学理工学部)

次の Neumann 境界条件における Allen-Cahn 方程式の特異極限を考える:

$$(AC)_\varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t u^\varepsilon = \varepsilon \Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon}, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル, $W(u) = \frac{1}{4}(1 - u^2)^2$ とする. $(AC)_\varepsilon$ は Modica-Mortola 問題のエネルギー汎関数

$$E^\varepsilon[u] := \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) dx$$

の勾配流であり, $E^\varepsilon[u_0^\varepsilon] < \infty$, $\|u_0^\varepsilon\|_\infty \leq 1$ のもとで, 滑らかな一意大域解 u^ε が得られる. そこで, $\varepsilon \rightarrow 0$ とした特異極限を考える. $\Omega = \mathbb{R}^n$ のとき, すなわち境界条件を考慮しないときは

$$\Gamma_t := \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^\varepsilon(t, x) \neq \pm 1\}$$

により生成される界面 $\{\Gamma_t\}$ は適当な意味で平均曲率流をみたす, すなわち

$$(MCF) \quad V = H, \quad x \in \Gamma_t$$

となることが知られている ([3, 4, 6]). ここで, V は界面 Γ_t の法速度ベクトル, H は Γ_t の平均曲率ベクトルである. このとき, Γ_t の法ベクトルは ∇u^ε の極限で与えられると推測できることから, 有界領域 Ω に Neumann 境界条件を与えると, 界面 Γ_t は $\partial\Omega$ と直交すると推測される. このことをどのように定式化すればよいかについて考える.

Katsoulakis-Kossioris-Reitich [7], Barles-Souganidis [1] は $(AC)_\varepsilon$ の特異極限が, 直交境界条件付き平均曲率流の粘性解理論による弱解を用いて特徴付けられることを証明した (cf. [4, 5, 10]). 我々は, Ilmanen [6], Takasao-Tonegawa [11] をもとにして, 幾何学的測度論における直交境界条件の定式化を行い, Brakke による (MCF) の測度論的弱解の存在を $(AC)_\varepsilon$ の特異極限を用いて証明した (cf. [2]).

本稿を通じて

- (1) $u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ は $\sup_{0 < \varepsilon < 1} E^\varepsilon[u_0^\varepsilon] < \infty$, $\sup_{0 < \varepsilon < 1} \|u_0^\varepsilon\|_\infty \leq 1$ をみたす.
- (2) Ω は強凸.

Date: 2015 年 5 月 23 日.

本講演の内容は, 利根川吉廣教授 (東京工業大学理工学研究科) との共同研究に基づく.

を仮定する. この仮定のもとで得られる $(AC)_\varepsilon$ の一意大域解 u^ε に対して, エネルギー測度 μ_t^ε を

$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$$

により定める.

定理 1 ([8]). 部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ と $\bar{\Omega}$ 上の Radon 測度 μ_t が存在して, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ かつ, すべての $t \geq 0$ に対して

$$\mu_t^{\varepsilon_i} \rightharpoonup \mu_t, \quad i \rightarrow \infty$$

が成り立つ. さらに, ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して, μ_t は可算 $(n-1)$ -修正可能測度である.

定理 1 の可算 $(n-1)$ -修正可能測度の厳密な定義は, Simon [9] を参照のこと. 大雑把にいうと, Lipschitz 曲面 Γ_t と密度関数 $\theta : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ が存在して, $(n-1)$ -次元 Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^{n-1}$ を用いて

$$(1) \quad \mu_t = \theta \mathcal{H}^{n-1}|_{\Gamma_t}$$

で表わすことができるということである. μ_t が Γ_t の面積要素と思っても差し支えない. 次に, μ_t と任意の $t \geq 0$ に対して, $\|V_t\| = \mu_t$ となる $\bar{\Omega} \times G(n, n-1)$ 上の Radon 測度 (ヴァリフォールド) V_t を考える. ここで, $G(n, n-1)$ は Grassmann 多様体であり, $A \subset \bar{\Omega}$ に対して

$$\|V_t\|(A) := V_t(A \times G(n, n-1))$$

である. このヴァリフォールド V_t は例えば, ほとんどすべての $x \in \Gamma_t$ における概接空間 T_x と $\phi \in C(\bar{\Omega} \times G(n, n-1))$ を用いて

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= \int_{\bar{\Omega} \times G(n, n-1)} \phi(x, S) dV_t(x, S) \\ &:= \begin{cases} \int_{\bar{\Omega}} \phi(x, T_x) d\mu_t(x), & \mu_t \text{ が修正可能} \\ \int_{\bar{\Omega}} \phi(\cdot, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) d\mu_t(x), & \mu_t \text{ が修正可能ではない} \end{cases} \end{aligned}$$

により与えることができる.

定理 2 ([8]). ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して V_t の全変動 $\|\delta V_t\|$ は $\|\delta V_t\|(\bar{\Omega}) < \infty$ をみたす.

定理 2 は, (1) における曲面 Γ_t に関して測度論的な平均曲率が定義できることを意味している. とくに, V_t の第一変分 δV_t の $\partial\Omega$ への制限を考えることができる. そこで, $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対して, V_t の第一変分の $\partial\Omega$ の接空間上への制限

$$\delta V_t|_{\partial\Omega}^\top(g) := \delta V_t|_{\partial\Omega}(g - (g \cdot \nu)\nu)$$

を考える.

定理 3 ([8]). ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して,

$$(2) \quad \|\delta V_t|_{\partial\Omega}^\top + \delta V_t|_{\Omega}\| \ll \|V_t\|$$

となる. Radon-Nikodym 微分

$$\delta V_t|_{\partial\Omega}^\top + \delta V_t|_{\Omega} = -H(t)\|V_t\|$$

を考えると, $H(t) \in L^2(\|V_t\|)$ をみたす. さらに $\nabla\phi(t, x) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす $\phi \in C^1([0, \infty) \times \bar{\Omega} : \mathbb{R}^+)$ と $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ に対し, Brakke の不等式

$$(3) \quad \int_{\bar{\Omega}} \phi(t, x) d\|V_t\|(x) \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\bar{\Omega}} (-\phi|H|^2 + \nabla\phi \cdot H + \partial_t\phi) d\|V_t\| dt.$$

が成り立つ.

定理 3 において, (2) が測度論的な直交境界条件を与えている. なぜなら, $\partial\Omega$ の接方向への変分については特異測度が消えることから, V_t の $\partial\Omega$ における従法線は $\partial\Omega$ の接空間に直交すると考えられるからである. また, (3) は, $\{V_t\}_{t>0}$ が測度論的な意味で平均曲率流をみたしていることを主張している. 実際, 超曲面の族 $\{\Gamma_t\}_{t>0}$ が平均曲率流の古典解であれば, Γ_t から定まる面積要素 dg_t に対して $d\|V_t\| = dg_t$ とすると, 発散定理を用いることにより, (3) が等号で成立する.

References

- [1] G. Barles, and P. E. Souganidis, *A new approach to front propagation problems: theory and applications*, Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998), 237–296.
- [2] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Mathematical Notes, vol. 20, Princeton University Press, 1978.
- [3] X. Chen, *Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations, **96** (1992), 116–141.
- [4] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1097–1123.
- [5] Y. Giga and M.-H. Sato, *Neumann problem for singular degenerate parabolic equations*, Differential Integral Equations **6** (1993), 1217–1230.
- [6] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature* J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.
- [7] M. Katsoulakis, G. T. Kossioris, and F. Reitich, *Generalized motion by mean curvature with Neumann conditions and the Allen-Cahn model for phase transitions*, J. Geom. Anal. **5** (1995), 255–279.
- [8] M. Mizuno and Y. Tonegawa, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, to appear in SIAM Journal on Mathematical Analysis.
- [9] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University **3**, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis Canberra, (1983).
- [10] M.-H. Sato, *Interface evolution with Neumann boundary condition*, Adv. Math. Sci. Appl. **4** (1994), 249–264.
- [11] K. Takasao and Y. Tonegawa, *Existence and regularity of mean curvature flow with transport term in higher dimensions*, <http://arxiv.org/abs/1307.6629>, 2013.

E-mail address: mizuno@math.cst.nihon-u.ac.jp