

Global solvability of the compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions

村田 美帆 (早稲田大学・基幹理工学研究科)

1 導入

水や空気など液体や気体を総称して流体と呼び、流体の運動によって密度が変化しない流体を非圧縮性流体、運動によって密度が変化する流体を圧縮性流体と呼ぶ。流体力学では、圧縮や膨張などの密度変化を無視できる現象を解析する場合は非圧縮性流体として扱い、流体が高速で流れている場合や温度変化が大きい場合など密度変化を無視できない現象を解析する場合には圧縮性流体として扱う。本講演では、圧縮性粘性流体の流れを記述する流速 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ($N \geq 2$) と密度 ρ を未知関数とした以下の準線形双曲・放物型方程式系をスリップ境界条件下で考察する。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{Div} \mathbf{S}(\mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = 0 & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma, t > 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma, t > 0, \\ (\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_* + \theta_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{NP})$$

ここで、 $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) + (\nu - \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}$, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T$, μ, ν はそれぞれ第一、第二粘性係数、 $\mathbf{I}$ は $N \times N$ 単位行列とする。また、圧力 $P(\rho)$ は ρ に依存し、 $\rho > 0$ について C^∞ 級関数でかつ $P'(\rho) > 0$ を満たすものとする。境界条件について、 $\mathbf{n}$ は Γ 上の単位外法線ベクトル、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し内積を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=1}^N a_j b_j$ で定義する。初期データについて、 ρ_* は正定数、 $\theta_0 = \theta_0(x)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(x)$ は既知の関数とする。

本講演の目的は、境界 Γ が $W_q^{4-1/q}$ の滑らかさをもつ有界領域 Ω において、初期値が十分小さいという仮定の下、(NP) の時間大域的可解性を時間 L_p 、空間 L_q 最大正則性が成立するクラスで証明することである。解の一意存在性を L_p - L_q 最大正則性のクラスで証明することの利点は、スリップ境界条件下で圧縮性粘性流体方程式に対する時間大域的可解性を L_2 エネルギー法を用いて示した先行研究 [2] に比べ、初期値に対し低い正則性の下で可解性を得ることができるという点である。

(NP) の第一式は双曲型方程式であり L_p - L_q 最大正則性では扱えないので Lagrange 座標 ξ への変数変換を行う。まず Lagrange 座標を導入する。 $x = x(\xi, t)$ を次の Cauchy 問題の解とする： $\partial x / \partial t = \mathbf{u}(x, t)$, $x|_{t=0} = \xi \in \Omega$ 。 $\mathbf{v}(\xi, t) = (v_1(\xi, t), \dots, v_N(\xi, t))$ を Lagrange 座標で表した流速とすれば、Euler 座標 x と Lagrange 座標 ξ の関係式は $x = \xi + \int_0^t \mathbf{v}(\xi, s) ds \equiv \mathbf{X}_\mathbf{v}(\xi, t)$ で与えられる。このとき、

$$\max_{i,j=1,\dots,N} \left\| \int_0^t (\partial v_i / \partial \xi_j)(\cdot, s) ds \right\|_{L_\infty(\Omega)} < \sigma \quad (0 < t < T, \sigma > 0 : \text{十分小})$$

とすれば $x = \mathbf{X}_\mathbf{v}(\xi, t)$ は全単射であるので、Lagrange 座標を用いて書き換えた次の問題 (P) を考察すればよい。 $\mathbf{u}(\mathbf{X}_\mathbf{v}(\xi, t), t) = \mathbf{v}(\xi, t)$, $\rho(\mathbf{X}_\mathbf{v}(\xi, t), t) = \rho_* + \theta(\xi, t)$ とするとき、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_t + \rho_* \operatorname{div} \mathbf{v} = F(\theta, \mathbf{v}) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \rho_* \mathbf{v}_t - \operatorname{Div} \mathbf{S}(\mathbf{v}) + P'(\rho_*) \nabla \theta = G(\theta, \mathbf{v}) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \mu [\mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}] = H(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) & \text{on } \Gamma, t > 0, \\ (\theta, \mathbf{v})|_{t=0} = (\theta_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

ここで $F(\theta, \mathbf{v})$, $G(\theta, \mathbf{v})$, $H(\mathbf{v})$ は非線形項を表し、 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}(\mathbf{X}_\mathbf{v}(\xi, t))$ とする。

本研究は早稲田大学の柴田良弘教授との共同研究である。

2 主結果

まず, rigid space を導入する.

$$\mathcal{R}_d = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

[1] により, Ω が球のような回転対称な領域の場合は $\mathcal{R}_d \neq \emptyset$, 非回転対称な場合には $\mathcal{R}_d = \emptyset$ であることが知られている. 次が本講演の主定理である.

定理 2.1. Ω を $W_q^{4-1/q}$ の滑らかさをもつ有界領域とし, $2 < p < \infty$, $N < q < \infty$, 粘性係数 μ , ν は $\mu > 0$, $\nu > (N-2)\mu/N$ を満たすものとする. ある $\epsilon > 0$ が存在し次を仮定する.

- ・ 初期データ $(\theta_0, \mathbf{u}_0) \in W_q^1(\Omega) \times B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)$ に対し $\|\theta_0\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)} \leq \epsilon$.
- ・ 整合条件: $\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ on Γ ,
- ・ 直交条件: $(\theta_0, 1)_\Omega = 0$, $((\rho_* + \theta_0)\mathbf{u}_0, \mathbf{r})_\Omega = 0$ (Ω : 回転対称, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$),
 $(\theta_0, 1)_\Omega = 0$ (Ω : 非回転対称).

このとき, 正定数 γ が存在し次の評価を満たすような (P) の一意解が存在する.

$$\theta \in W_p^1((0, \infty), W_q^1(\Omega)), \quad \mathbf{v} \in W_p^1((0, \infty), L_q(\Omega)^N) \cap L_p((0, \infty), W_q^2(\Omega)^N).$$

$$\|e^{\gamma t}(\theta_t, \theta)\|_{L_p((0, \infty), W_q^1(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\mathbf{v}_t\|_{L_p((0, \infty), L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\mathbf{v}\|_{L_p((0, \infty), W_q^2(\Omega))} \leq C\epsilon.$$

ここで, $B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega) = (L_q(\Omega), W_q^2(\Omega))_{1-1/p, p}$, スカラー値関数 f, g とベクトル値関数 $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ に対し, $(f, g)_\Omega = \int_\Omega f g dx$, $(\mathbf{f}, \mathbf{g})_\Omega = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx$ とする.

定理 2.1 を示すためには, Lagrange 座標における方程式 (P) に対する時間局所解 (cf. [3]) を時刻 $t = \infty$ まで延長する. 解の延長を行う際に (P) を線形化し得られる線形化問題に対する解の指数減衰評価を用いるが, この評価を得る際に鍵となるのが線形化問題に対応する次のレゾルベント問題 (RP) に対する解作用素の $\mathcal{R}$ -有界性である.

$$\begin{cases} \lambda\theta + \rho_* \operatorname{div} \mathbf{v} = f & \text{in } \Omega, \\ \rho_* \lambda \mathbf{v} - \operatorname{Div} \mathbf{S}(\mathbf{v}) + P'(\rho_*) \nabla \theta = \mathbf{g} & \text{in } \Omega, \\ \mu[\mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}] = \mathbf{h} - \langle \mathbf{h}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \tilde{h} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{RP})$$

実際, (RP) に対する解作用素の $\mathcal{R}$ -有界性を証明できれば, 解析半群の生成のみならず Weis の作用素値 Fourier multiplier theorem [4] により最大正則性に関する評価式を得ることができるため, 線形化問題に対する解の指数減衰評価を得ることができる.

References

- [1] H. Ito, *Remark on Korn's inequality for vector fields which are tangent or normal to the boundary*, preprint.
- [2] T. Kobayashi and W. Zajączkowski, *On global motion of a compressible barotropic viscous fluid with boundary slip condition*, *Applicationes Mathematicae*, **26**, **2** (1999), 159–194.
- [3] M. Murata, *On a maximal L_p - L_q approach to the compressible viscous fluid flow with slip boundary condition*, *Nonlinear Analysis* **106** (2014), 86–109.
- [4] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, *Math. Ann.* **319** (2001), 735–758.