弱い減衰項を持つ n 次元放物・放物型走化性方程式系の時間大域解の存在と正則性 †

中口 悦史 (東京医科歯科大学 教養部)*

次の非線形放物型偏微分方程式系の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + f(u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + g(u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{E}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域で，$\partial/\partial\nu$ で $\partial\Omega$ の外向き法線方向の微分を表す。空間次元 n は任意の自然数とし，係数 χ と τ は正定数とする。関数 $f(u)$ と $g(u)$ はともに $u \geq 0$ について滑らかな実関数で，μ を正定数，α と β を

$$\alpha > 1, \quad 0 < \beta \leq 2 \tag{1}$$

を満たす指数として，次の条件を満たすものとする：

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ u \geq 0 \text{ が十分大きいとき} \quad f(u) = u - \mu u^\alpha, \\ u \geq 0 \text{ のとき} \quad g(u) = u(1+u)^{\beta-1}. \end{cases} \tag{2}$$

方程式系 (E) はバクテリアコロニーのパターンダイナミクスを記述するモデルとして知られている [4]。特に $f(u) = 0$ かつ $g(u)$ が線形（(2) で $\alpha = \beta = \mu = 1$？）の場合は，Keller-Segel 系の典型的な一例 [3] で，$n = 1$ のときは非負の解は必ず時間大域的に存在するが，$n = 2$ のときは $\chi\|u_0\|_{L_1}$ が小さいときに限り時間大域解が存在し，$n \geq 3$ のときは必ず解の有限時刻での爆発が見られることが，すでに知られている（[2, 13] など）。一方で $f(u) = u(1 - \mu u)$ かつ $g(u)$ が線形，つまり (2) で $\alpha = 2$ かつ $\beta = 1$ の場合は，$\chi\|u_0\|_{L^1}$ が大きくても（$n \geq 3$ では Ω が凸で μ が大きい場合のみ）時間大域解を構成できることが示されている [9, 14]。また $\tau = 0$ に限定した場合は，(2) で $\beta = 1$ かつ $\alpha > \max\{n/2, 2 - (1/n)\}$ の場合について，時間大域解の存在が示されている [12]。

本講演者らは [5, 6] において，$g(u)$ を非線形に拡張することによって，一般に $\tau > 0$ のとき，$n = 2, 3$ の場合のみであるが，ヒルベルト空間 $H_2^{(n/2)-1}(\Omega) \times H_2^{(n/2)+\varepsilon}(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ の中で有界な時間大域解を構成できる十分条件を示した。

定理 1 ([6, Theorem 4.9])**.** $n = 2, 3$ とし，指数 α と β は関係式

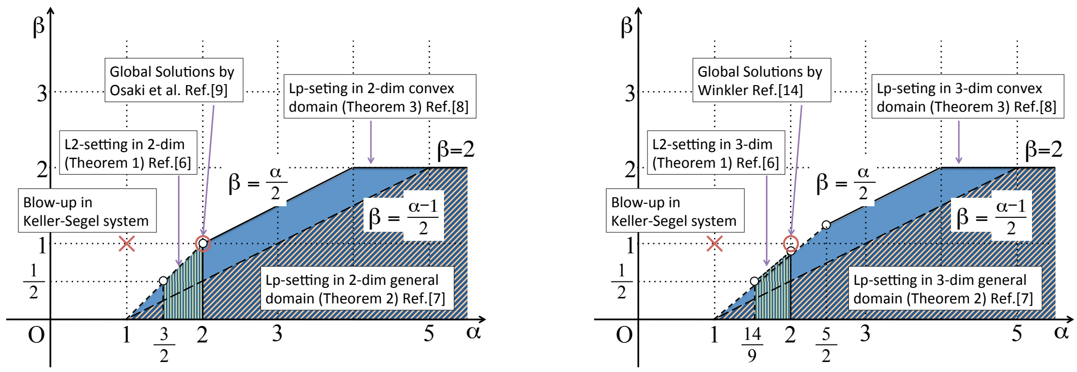
$$\frac{2(n+4)}{n+6} < \alpha \leq 2, \qquad 0 < \beta < \frac{n+6}{2(n+2)}(\alpha - 1) \tag{3}$$

を満たすとする。このとき，任意の非負の初期関数対 $(u_0, v_0) \in H_2^{\frac{n}{2}-1}(\Omega) \times W \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases} 0 \leq u \in \mathcal{C}([0,\infty); H_2^{\frac{n}{2}-1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H_{2,N}^3(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H_2^1(\Omega)) \\ 0 \leq v \in \mathcal{C}([0,\infty); W) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H_{2,N^2}^{4+\varepsilon}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H_{2,N}^{2+\varepsilon}(\Omega)) \end{cases} \tag{4}$$

に属する一意な時間大域解 (u, v) を有する。ここで W は $n = 2$ のとき $H_2^{1+\varepsilon}(\Omega)$, $n = 3$ のとき $H_{2,N}^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ を表し，ε は $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ を満たす指数。 ◊

2015 年 6 月 27 日，第 133 回神楽坂解析セミナーにおける講演。
† 大崎浩一氏 (関西学院大学理工学部) との共同研究に基づく。科学研究費補助金 (課題番号:26400180,23540125) の助成による。
* 〒 272-0827 千葉県市川市国府台 2-8-30 東京医科歯科大学教養部。*E-mail address*: nakaguti.las@tmd.ac.jp。



2 次元の場合　　　　3 次元の場合

図 1. 方程式 (E) が時間大域解を有する (α, β) の範囲

本講演では，バナッハ空間 $L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ の枠組み $(n < p < \infty)$ を導入して，先行結果 [5, 6] の議論を任意次元へ拡張する試みについて述べる。

主結果は以下の通り。

定理 2 ([7, Theorem 1]+[8, Theorem 5])**.** n は任意の自然数，指数 α と β は関係式 (1) と

$$\beta < \frac{\alpha - 1}{2} \tag{5}$$

を満たすとする。このとき，

$$\max\{2, n, (\alpha - 2)n\} < p < \infty \tag{6}$$

を満たす任意の指数 p と，任意の非負の初期関数対 $(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases} 0 \le u \in \mathcal{C}([0,\infty); L_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H^2_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); L_p(\Omega)), \\ 0 \le v \in \mathcal{C}([0,\infty); H^1_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H^3_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H^1_p(\Omega)) \end{cases} \tag{7}$$

に属する一意な時間大域解 (u, v) を有する。ただし $p' = \frac{p}{p-1}$ 。さらにこの解は，$\psi(\cdot)$ を適当な増加関数として，

$$t \ge 0 \text{ のとき} \quad \|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le \psi\left(\|u_0\|_{L_p} + \|v_0\|_{H_p^1}\right) \tag{8}$$

を満たす。 ◊

定理 3 ([8, Theorem 1])**.** 領域 Ω が凸の場合は，指数 α と β が関係式 (1) と

$$\beta \le \frac{\alpha}{2} \quad \text{かつ} \quad \beta < \frac{n+2}{2n}(\alpha - 1) \tag{9}$$

を満たすときも，定理 *2* は成立する。 ◊

定理 1,2,3 に現れた (α, β) の範囲を図示すると図 1 のようになる。領域 Ω が凸である場合は，解の正則性が良くなり，時間大域存在の可能性が広がるとも解釈できる。先行結果を完全に包含できていない点については，今後さらなる検討の必要がある。

局所解の構成は，八木 [15, 16] による半線形放物型方程式の理論によるが，その基礎として，L_p-空間におけるラプラス作用素のシフト性 (shift property)[1, 11] と，八木 [15, 16] の有界な H_∞ 関数演算 (bounded H_∞ functional calculus) の理論に基づくラプラス作用素の分数べきの定義域の特徴付けを応用する。解のアプリオリ評価は先行結果 [5, 6] と同様に進める。領域 Ω が凸の場合は，Tao-Winkler の補題 [10, Lemma 3.2] を用いて，より扱いやすい評価式が得られることを見る。

参考文献

[1] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Classics in Applied Mathematics vol. 69, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2011; originally published as Monographs and Studies in Mathematics vol. 24, Pitman Publishing, Boston, 1985.

[2] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, "A blow-up mechanism for a chemotaxis model," *Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. IV* **24** (1997) 633–683.

[3] E. F. Keller and L. A. Segel, "Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability," *J. Theor. Biol.* **26** (1970) 399–415.

[4] M. Mimura and T. Tsujikawa, "Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth," *Physica A* **230** (1996) 499–543.

[5] E. Nakaguchi and K. Osaki, "Global existence of solutions to a parabolic-parabolic system for chemotaxis with weak degradation," *Nonlinear Anal. TMA* **74** (2011) 286–297.

[6] E. Nakaguchi and K. Osaki, "Global solutions and exponential attractors of a parabolic-parabolic system for chemotaxis with subquadratic degradation," *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **18** (2013) 2627–2646.

[7] E. Nakaguchi and K. Osaki, "L_p-estimates of solutions to n-dimensional parabolic-parabolic system for chemotaxis with subquadratic degradation," *Funkcialaj Ekvacioj* (to appear).

[8] E. Nakaguchi and K. Osaki, submitted.

[9] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, "Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations," *Nonlinear Anal. TMA* **51** (2002) 119–144.

[10] Y. Tao and M. Winkler, Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity, J. Differential Equations 252 (2012) 692–715.

[11] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978; 2nd revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, 1995.

[12] M. Winkler, "Chemotaxis with logistic source: Very weak global solutions and their boundedness properties," *J. Math. Anal. Appl.* **348** (2008) 708–729.

[13] M. Winkler, "Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model," *J. Differential Equations* **248** (2010) 2889–2905.

[14] M. Winkler, "Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source," *Comm. Partial Differential Equations* **35** (2010) 1516–1537.

[15] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[16] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 上：可解性の理論／下：解の挙動と自己組織化, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2011.