

特異な感応性関数をもつ準線形放物・放物型 Keller-Segel 系の解の有界性*

西山 千尋
(東京理大・理 M2)

次の準線形 Keller-Segel 系の初期値境界値問題 (KS) について考える:

$$(KS) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(u) \nabla u) - \nabla \cdot (S(u) \chi(v) \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) は滑らかな境界 $\partial \Omega$ をもつ有界領域とし, 初期値 u_0 は非負値関数, v_0 は正值関数とする. また, D, S, χ は以下を満たすと仮定する:

- (1) $D, S \in C^2([0, \infty))$, $S(0) = 0$, $S \geq 0$,
- (2) $K_0(u+1)^{m-1} \leq D(u) \leq K_1(u+1)^{M-1}$ ($\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \exists K_0, K_1 > 0 \quad \forall u \geq 0$),
- (3) $S(u)/D(u) \leq K(u+1)^\alpha$ ($\exists \alpha < 2/N \quad \exists K > 0 \quad \forall u \geq 0$),
- (4) $\chi(v) = 1/v$.

先行研究では, 問題 (KS) の時間大域解の存在と有界性について以下の結果が知られている:
シグナル非依存な感応性関数をもつ場合 ($\chi(v) \equiv 1$)

(1), (2), (3) を満たすときの, 時間大域解の存在と有界性 (Tao-Winkler [3], Ishida-Seki-Yokota [2]).

線形拡散の場合 ($D(u) \equiv 1$, $S(u) = \chi_0 u$, $\chi(v) = 1/v$)

$0 < \chi_0 < \sqrt{2/N}$ のときの, 時間大域解の存在と有界性 (Fujie [1]).

本研究では, Fujie [1] で得られた時間に一様な v の下からの評価を用いることで, シグナル依存型感応性関数と非線形拡散の両方をもつ (KS) に対して時間大域解の存在と有界性を得た.

定理

$(u_0, v_0) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ とする. また, D, S, χ は (1), (2), (3), (4) を満たすとする. このとき, (KS) の時間大域的古典解

$$u \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)), \quad v \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty))$$

が一意的に存在し, さらにその解は有界である:

$$\text{ある定数 } C > 0 \text{ が存在し, } \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{for all } t > 0.$$

ただし, $C^{2,1}$ の 2 は x についての微分可能回数, 1 は t についての微分可能回数を表す.

参考文献

- [1] K. Fujie, *Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), 675–684.
- [2] S. Ishida, K. Seki, T. Yokota, *Boundedness in quasilinear Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type on non-convex bounded domains*, J. Differential Equations **256** (2014), 2993–3010.
- [3] Y. Tao, M. Winkler, *Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity*, J. Differential Equations **252** (2012), 692–715.

*本講演は横田智巳氏 (東京理大・理) と藤江健太郎氏 (東京理大・理 D1) との共同研究に基づくものである.