

連立シュレディンガー方程式の正值解の多重存在

佐藤 洋平

埼玉大学

1. INTRODUCTION

次の連立非線形 Schorödinger 方程式を考える。

$$(*) \begin{cases} -\Delta u_j + \lambda_j u_j = \mu_j u_j^3 + \sum_{i=1, i \neq j}^3 \beta_{i,j} u_i^2 u_j & \text{in } \Omega, \quad (j = 1, 2, 3), \\ u_j \in H_0^1(\Omega) & (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N \leq 3$) は有界領域で $\lambda_j, \mu_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$), $\beta_{i,j} \in \mathbf{R}$, $\beta_{i,j} = \beta_{j,i}$ ($1 \leq i \neq j \leq 3$) を満たすとする。この講演では、特に、相互作用項の係数が $\beta_{1,2} > 0$, $\beta_{1,3}, \beta_{2,3} \leq 0$ のときの正值解の存在とその解の形状・多重存在について考える。

2. EXISTENCE OF LEAST ENERGY SOLUTIONS

この節では $\beta_{1,2}$ が十分大きいときのエネルギー最小正值解の存在と、 $\beta_{1,2} \rightarrow \infty$ としたとき極限を見る。 $\beta_{1,2}$ はパラメータとして扱うため、記号の簡単のため、単に $\beta \equiv \beta_{1,2}$ ともかく。また、以下の記号を用いる。

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx \quad \text{for } u \in L^p(\Omega) \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

$$\|u\|_{\lambda, \Omega}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{for } u \in H_0^1(\Omega).$$

(*) のエネルギー最小正值解について次の結果を得た。

Theorem 1. ([1]) $\beta \equiv \beta_{1,2} > 0$, $\beta_{1,3}, \beta_{2,3} \leq 0$ とする。このとき、ある $\beta_* > 0$ が存在して、任意の $\beta > \beta_*$ に対して、(*) はエネルギー最小正值解 $\vec{u}_\beta = (u_{1,\beta}, u_{2,\beta}, u_{3,\beta})$ をもつ。さらに $\beta_m \rightarrow \infty$ なる列と、関数 $U_j \in H_0^1(\Omega)$ ($j = 1, 2, 3$) が存在して

$$(\sqrt{\beta_m} u_{1,\beta_m}, \sqrt{\beta_m} u_{2,\beta_m}, u_{3,\beta_m}) \rightarrow (U_1, U_2, U_3) \quad \text{strongly in } H_0^1(\Omega)^3$$

を満たす。ここで U_3 は

$$-\Delta u_3 + \lambda_3 u_3 = \mu_3 u_3^3 \quad \text{in } \Omega, \quad u_3 \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

のエネルギー最小正值解であり、 (U_1, U_2) は

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + (\lambda_1 - \beta_{1,3} U_3^2) u_1 &= u_1 u_2^2 \quad \text{in } \Omega, \quad u_1 \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta u_2 + (\lambda_2 - \beta_{2,3} U_3^2) u_2 &= u_1^2 u_2 \quad \text{in } \Omega, \quad u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2)$$

のエネルギー最小正值解である。特に (U_1, U_2, U_3) は次の最小化問題の最小値を達成する関数である。

$$e = \inf_{u_3 \in K_3} \inf_{(u_1, u_2) \in N_{u_3}} \left(\|u_1\|_{\lambda_1, \Omega}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2, \Omega}^2 - \beta_{1,3} \|u_1 u_3\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta_{2,3} \|u_2 u_3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

ここで

$$K_3 = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は (1) のエネルギー最小正值解}\},$$

$$N_{u_3} = \left\{ (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \begin{aligned} & |||u_1|||_{\lambda_1, \Omega}^2 + |||u_2|||_{\lambda_2, \Omega}^2 - \beta_{1,3} ||u_1 u_3||_{L^2(\Omega)}^2 \\ & - \beta_{2,3} ||u_2 u_3||_{L^2(\Omega)}^2 = 2 ||u_1 u_2||_{L^2(\Omega)}^2 \neq 0 \end{aligned} \right\}.$$

3. SYMMETRY BREAKING PHENOMENON

この節では、領域 Ω が球であっても Theorem 1 で得られたエネルギー最小正值解 u_β は球対称でないことを見る。そのために極限方程式 (2) のエネルギー最小正值解は球対称でないことを示す。実際には (2) を含むような方程式

$$\begin{aligned} -\epsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 &= u_1 u_2^2 \quad \text{in } \Omega, \quad u_1 \in H_0^1(\Omega) \\ -\epsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 &= u_1^2 u_2 \quad \text{in } \Omega, \quad u_2 \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3)_\epsilon$$

を考え、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの解の凝集を示すことで非球対称性を示す。ここで $V_i(x) \in C(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ ($i = 1, 2$) は正の関数である。

$(\vec{u}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ を $(3)_\epsilon$ のエネルギー最小正值解の族とする。 $(\vec{u}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ が集中する点を述べるために、以下で定義される $b(\lambda_1, \lambda_2)$ が重要な役割を果たす:

$$b(\lambda_1, \lambda_2) = \inf_{(u_1, u_2) \in N_{\lambda_1, \lambda_2}} (|||u_1|||_{\lambda_1, \mathbf{R}^N}^2 + |||u_2|||_{\lambda_2, \mathbf{R}^N}^2),$$

$$N_{\lambda_1, \lambda_2} = \{(u_1, u_2) \in H^1(\mathbf{R}^N)^2 \mid |||u_1|||_{\lambda_1, \mathbf{R}^N}^2 + |||u_2|||_{\lambda_2, \mathbf{R}^N}^2 = 2 ||u_1 u_2||_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 \neq 0\}.$$

このとき $b(\lambda_1, \lambda_2)$ はある $\vec{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\mathbf{R}^N)^2$ によって達成され、 $\vec{u}$ は

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 &= u_1 u_2^2 \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u_1 \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 &= u_1^2 u_2 \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u_2 \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{aligned} \quad (4)_{(\lambda_1, \lambda_2)}$$

のエネルギー最小正值解となる。また $b(\lambda_1, \lambda_2)$ は以下の性質を満たす。

Lemma 1.

- (b1) $b(\lambda_1, \lambda_2) : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbf{R}$ は連続。
- (b2) $b(\lambda_1, \lambda_2)$ は λ_i に関して単調増加。 ($i = 1, 2$)

このとき次が成り立つ。

Theorem 2. ([1]) ある部分列 $\epsilon_m \rightarrow 0$ と点列 $x_m \rightarrow x_0$ in $\bar{\Omega}$ と $(4)_{(V_1(x_0), V_2(x_0))}$ のエネルギー最小正值解 $\vec{u}_0 = (u_{1,0}, u_{2,0}) \in H^1(\mathbf{R}^N)^2$ が存在して、

$$\begin{aligned} u_{i, \epsilon_m}(\epsilon_m x - x_m) &\rightarrow u_{i,0}(x) \quad \text{strongly in } H^1(\mathbf{R}^N) \quad (i = 1, 2), \\ b(V_1(x_m), V_2(x_m)) &\rightarrow b(V_1(x_0), V_2(x_0)) = \underline{b}, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\underline{b} = \min_{x \in \bar{\Omega}} b(V_1(x), V_2(x))$ 。

Remark 1. 領域 Ω が球であるとき、(1) のエネルギー最小解 U_3 は一意であり、球対称関数で $U_3'(r) < 0, r = |x|$ を満たす。よって (2) のポテンシャル関数 $\lambda_i - \beta_{i,3} U_3(x)$ ($i = 1, 2$) は境界 $\partial\Omega$ 上で最小値をとる。Lemma 1 の (b2) より、関数 $b(V_1(x), V_2(x))$ も境界 $\partial\Omega$ で最小値をとる。したがって (2) のエネルギー最小正值解 (U_1, U_2) は $\partial\Omega$ の近くに集中する。特に (U_1, U_2) は球対称ではないことが分かる。

4. MULTIPLE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS

この節では、領域 Ω が球のとき、(1) の正值解の多重存在を見る。 $\lambda_1 = \eta\lambda'_1$, $\lambda_2 = \eta\lambda'_2$, $\beta_{1,3} = \eta\beta'_{1,3}$, $\beta_{2,3} = \eta\beta'_{2,3}$, とおく。

Theorem 3. ([2]) $N = 2$ とする。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、ある $\lambda_k > 0$ が存在して、任意の $\lambda_3 > \lambda_k$ に対して、ある $\eta_k(\lambda_3) > 0$ が存在して、任意の $\eta > \eta_k(\lambda_3)$ に対して、ある $\beta_k(\eta, \lambda_3) > 0$ が存在して、任意の $\beta \equiv \beta_{1,2} > \beta_k(\eta, \lambda_3)$ に対して、(*) は少なくとも $k + 1$ 個の正值解 $\vec{u}^\ell = (u_1^\ell, u_2^\ell, u_3^\ell)$ ($1 \leq \ell \leq k + 1$) をもつ。

Remark 2. $k + 1$ 個の解のうち、 $\vec{u}^\ell$ ($\ell = 1, \dots, k$) は $\mathbb{Z}_\ell$ -対称で u_1^ℓ, u_2^ℓ が境界の近くに ℓ 個の集中点をもつ正值解。 $\vec{u}^{k+1}$ は球対称正值解。

Theorem 4. ([2]) $N = 3$ とする。ある $\lambda_* > 0$ が存在して、任意の $\lambda_3 > \lambda_*$ に対して、ある $\eta_k(\lambda_3) > 0$ が存在して、任意の $\eta > \eta_k(\lambda_3)$ に対して、ある $\beta_k(\eta, \lambda_3) > 0$ が存在して、任意の $\beta \equiv \beta_{1,2} > \beta_k(\eta, \lambda_3)$ に対して、(*) は少なくとも 6 個の正值解をもつ。

Remark 3. 6 個の解は、1-peak 正值解、 $\mathbb{Z}_2$ -対称正值解、 P_4 -対称正值解、 P_8 -対称正值解、 P_{20} -正值解、球対称正值解である。ただし P_4 は正四面体群、 P_8 は正八面体群、 P_{20} は正二十面体群。

REFERENCES

- [1] Y. Sato, Z.-Q. Wang, “Least energy solutions for nonlinear Schrödinger systems with mixed attractive and repulsive couplings”, Adv. Nonlinear Stud. **15** 1–22 (2015).
- [2] Y. Sato, Z.-Q. Wang, “Multiple positive solutions for Schrödinger systems with mixed couplings”, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.