

Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions

清水扇丈 (京都大学大学院人間・環境学研究科)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) を境界が C^3 級の有界領域とし, 時刻 $t \geq 0$ において $\Omega_1(t) \subset \Omega$, $\Omega_2(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_1(t)}$ とおく. 但し $\partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega = \emptyset$ とする. 2相 $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ の自由界面 $\Gamma(t) := \partial\Omega_1(t)$ を挟んで相転移を伴って運動する圧縮性2相流体を考える. 本講演では, 温度を定数と仮定する. $\Omega_1(t)$ 上 $v_1(t)$, $\Omega_2(t)$ 上 $v_2(t)$ である関数を単に $\Omega(t)$ 上 $v(t)$ と表し, $\Gamma(t)$ 上のジャンプ量を $[[v]] = (v|_{\Omega_2(t)} - v|_{\Omega_1(t)})|_{\Gamma(t)}$ と表す. 初期流速 u_0 , 初期密度 $\rho_0 > 0$, 初期界面 Γ_0 が与えられたとき, 未知の流速 u , 密度 ρ , 自由界面 Γ は

$$(PT) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \Gamma(t), \\ \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \operatorname{div} T = 0, & \text{in } \Omega \setminus \Gamma(t), \\ [[u]] = [[1/\rho]]j\nu_\Gamma & \text{on } \Gamma(t), \\ [[1/\rho]]^2\nu_\Gamma - [[T\nu_\Gamma]] = \sigma H_\Gamma\nu_\Gamma & \text{on } \Gamma(t), \\ [[\psi(\rho)]] + [[1/(2\rho^2)]]j^2 - [[T\nu_\Gamma \cdot \nu_\Gamma/\rho]] = 0 & \text{on } \Gamma(t), \\ V_\Gamma - u \cdot \nu_\Gamma + j/\rho = 0 & \text{on } \Gamma(t), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \Gamma(0) = \Gamma_0 \end{array} \right.$$

を満たす. ここで, ν_Γ は Ω_1 の単位外法線, V_Γ は $\Gamma(t)$ の法線速度, $\psi(\rho)$ は自由エネルギー, $H_\Gamma = -\operatorname{div}_\Gamma \nu_\Gamma$ は $\Gamma(t)$ の平均曲率. $\sigma > 0$ は表面張力定数である. 圧力 $\pi(\rho)$, ずり粘性係数 $\mu_s(\rho)$, 体積粘性係数 $\mu_b(\rho)$ と $D(u) = (\nabla u + {}^T[\nabla u])/2$ を用いて, ストレステンソルは

$$T = T(u, \rho) = 2\mu_s(\rho)D(u) + \mu_b(\rho)\operatorname{div} u I - \pi(\rho)I$$

で与えられる. 圧力は Maxwell の法則に従い, $\pi(\rho) = \rho^2 \partial_\rho \psi(\rho)$ で与えられる. 全エネルギーがリヤプノフ関数となるよう, 粘性係数は

$$(1) \quad \mu_s(\rho) > 0, \quad 2\mu_s(\rho) + n\mu_b(\rho) > 0,$$

を満たすとする. 相束 j を

$$j = \rho(u \cdot \nu_\Gamma - V_\Gamma)$$

と定め, $j \neq 0$ のとき, 即ち $V_\Gamma \neq u \cdot \nu_\Gamma$ で相転移を表現する.

Theorem 1 (局所 L_p 可解性). $p > n + 2$. $\psi_k(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\mu_{sk}(\cdot), \mu_{bk}(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ は (1) を満たすとする ($k = 1, 2$). 初期データは,

$$u_0 \in W_p^{2-2/p}(\Omega \setminus \Gamma_0)^n, \quad 0 < \rho_0 \in H_p^1(\Omega \setminus \Gamma_0), \quad \Gamma_0 \in W_p^{3-2/p},$$

の正則性をもち, $\delta > 0$ と $\eta > 0$ が存在して,

$$[[u_0 \cdot \nu_0]] \leq \delta, \quad [[u_0 \cdot \nu_0]] \neq 0, \quad [[\rho_0]] \geq \eta$$

本研究は Halle 大学の J. Prüss 教授との共同研究である.

と整合性条件を満たすとする. このとき,

$$T = T(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega \setminus \Gamma_0)}, \|\rho_0\|_{H_p^1(\Omega \setminus \Gamma_0)}, \|\Gamma_0\|_{W_p^{3-2/p}}, \delta, \eta) > 0$$

が存在して, (PT) の $[0, T]$ 上 L_p -解 (u, ρ, Γ) が存在する.

Remark 2. (1) 半沢変換を行った解は次のクラスに属する.

$$\begin{aligned} u &\in H_p^1(0, T; L_p(\Omega)) \cap L_p(0, T; H_p^2(\Omega \setminus \Sigma)), \\ \rho &\in C([0, T]; H_p^1(\Omega \setminus \Sigma)), \\ h &\in W_p^{2-1/2p}(0, T; L_p(\Sigma)) \cap H_p^1(0, T; W_p^{2-1/p}(\Sigma)) \cap L_p(0, T; W_p^{3-1/p}(\Sigma)). \end{aligned}$$

- (2) $\llbracket u_0 \cdot \nu_0 \rrbracket \neq 0$ は Γ_0 での蒸発のみまたは凝縮のみを意味する.
- (3) $\|\llbracket u_0 \cdot \nu_0 \rrbracket\| \leq \delta$ は, $j_0 = \llbracket u_0 \cdot \nu_0 \rrbracket / \llbracket \rho_0^{-1} \rrbracket$ も小さいことを意味する.
- (4) 非圧縮性 2 相流では, $\|\llbracket u_0 \cdot \nu_0 \rrbracket\| \leq \delta$ と $\llbracket u_0 \cdot \nu_0 \rrbracket \neq 0$ の仮定なしに, 局所 L_p 可解性が得られた (cf. [3]).
- (5) 一意性はまだ得られていない.

証明は以下の手順で行う. まず, 半沢変換により, (PT) を固定領域での準線形問題に変換する. 固定界面を Σ とし, 自由界面 $\Gamma(t)$ との法線方向の高さ関数を h とする. 次に密度 ρ を特性曲線の方法で解き, 流速 u と高さ関数 h の関数として表す. そして, 線形化問題の流速 u と高さ関数 h についての最大 L_p 正則性を得る.

非線形問題を解くにあたり, 密度 ρ が縮小評価を弱い位相でしか満たさないところが問題点となる. 実際,

$$|\rho - \bar{\rho}|_{L_p(\Omega)} \leq C(|u - \bar{u}|_{H_p^1(\Omega \setminus \Sigma)} + |h - \bar{h}|_{W_p^{2-1/p}(\Sigma)})$$

において, C は $|u|_{H_p^2(\Omega \setminus \Sigma)}$ と $|h|_{W_p^{3-1/p}(\Sigma)}$ に依存する. u は $H_p^2(\Omega \setminus \Sigma)$ が, h は $W_p^{3-1/p}(\Sigma)$ が空間変数についての最大の正則性クラスであるため, ρ の $H_p^1(\Omega \setminus \Sigma)$ や $L_p(\Sigma)$ での縮小評価は期待できない. そのため, 非線形問題を弱いクラスで解く. 非線形作用素 N を $N_1 + N_2$ と, 非線形の最高階の作用素 N_1 と低階の作用素 N_2 に分けると, N_1 は縮小作用素, N_2 は連続かつコンパクトな作用素となり, Deimling の不動点定理 (cf. [1]) を適用して, N が不動点をもつことがわかる.

参考文献

- [1] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Dover, 1985.
- [2] J. Prüss, S. Shimizu, Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions. Preprint.
- [3] J. Prüss, S. Shimizu, M. Wilke, Qualitative Behavior of incompressible two-phase flows with phase transitions: The case of non-equal densities. Comm. PDE **39**, 1236-1283 (2014).