

平滑化評価式および制限定理の最良定数について

杉本 充 (MITSURU SUGIMOTO) *

1. シュレディンガー方程式の平滑化評価式と制限定理

自由シュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (i\partial_t - \Delta_x) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

の解 $u(t, x) = e^{-it\Delta_x}\varphi(x)$ は、以下をみたすことが知られている：

$$\|Tu(t, x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

$$\begin{aligned} [A] \quad & T = \langle x \rangle^{-1} \langle D_x \rangle^{1/2} \quad \cdots \quad n \geq 3, \\ [B] \quad & T = |x|^{a-1} |D_x|^a \quad \cdots \quad 1 - n/2 < a < 1/2, n \geq 2, \\ [C] \quad & T = \langle x \rangle^{-s} |D_x|^{1/2} \quad \cdots \quad s > 1/2, n \geq 2. \end{aligned}$$

ただし $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$, $\langle D_x \rangle = \sqrt{1 - \Delta_x}$. このような評価式はしばしば平滑化評価式とよばれ、双対を考えることにより、制限定理と同値になることもわかる. 例えば, Type [B] の場合には

$$\|g|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1}; d\omega)} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \|g\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^n)}$$

($n/2 > s > 1/2$) と同値である.

2. 平滑化評価式の最良定数

平滑化評価式の最良定数についてはこれまであまり知られていなかったが, $n \geq 3$ の場合に Simon (1992) により, Type [B] の $a = 0$ の場合 および Type [C] の $s = 1$ における最良定数が与えられている:

$$\begin{aligned} [A] \quad & T = \langle x \rangle^{-1} \langle D_x \rangle^{1/2} \quad \cdots \quad ? \\ [B] \quad & T = |x|^{-1} \quad \cdots \quad \sqrt{\pi/(n-2)} \\ [C] \quad & T = \langle x \rangle^{-1} |D_x|^{1/2} \quad \cdots \quad \sqrt{\pi/2} \end{aligned}$$

一般の場合の最良定数は何か? また Extremiser は存在するのか? この講演では, この問題に対する最新の研究成果を報告する:

- Type [A] の $n = 3, n \geq 5$ の場合での最良定数はそれぞれ

$$\pi^{1/2}, \quad (\pi/2)^{1/2}$$

であり, Extremiser は存在しない.

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (Graduate School of Mathematics, Nagoya University) .

- Type [B] の $1 - n/2 < a < 1/2$ の場合における最良定数は

$$\left(\pi 2^{2a-1} \frac{\Gamma(1-2a)\Gamma(\frac{n}{2}+a-1)}{\Gamma(1-a)^2\Gamma(\frac{n}{2}-a)} \right)^{1/2}$$

であり, 球対称関数とその Extremiser である (Watanabe 1991).

- Type [C] の $s > 1/2, n \geq 3$ の場合における最良定数は

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{2\Gamma(s)} \right)^{1/2}$$

であり, Extremiser は存在しない.

講演中に, 制限定理の最良定数を含むその他様々な成果についても紹介する.

3. Mizohata-Takeuchi 予想

Drift 項のついたシュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) + V(x) \cdot \nabla_x u(t, x) = F(t, x) \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

が L^2 -wellposed であるための必要十分条件を求める研究に関連して, V の X -ray 変換

$$\tilde{V}(x, \theta) = \int_0^\infty V(x + s\theta) ds$$

が有界であることと平滑化評価式 ($\Leftrightarrow$ 制限定理)

$$\|V(x)|D_x|^{1/2}e^{-it\Delta_x}f(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が成立することは互いに同値であると予想されており, $V(x)$ が radial function ならばこれは正しいことが知られている (Barcelo-Ruiz-Vega 1997). 実は, 最良定数のある表現式を用いることにより, (多くの場合に成立するある仮定のもとで) この事実をより精密な形で再証明することができる.

なお, この講演は以下の論文の内容にもとづくものである:

REFERENCES

- [BS1] N. Bez and M. Sugimoto, *On the best constant and extremisers for some smoothing estimates*, (to appear in J. Anal. Math.).
- [BS2] N. Bez and M. Sugimoto, *Optimal forward and reverse estimates of Morawetz and Kato–Yajima type with angular smoothing index*, J. Fourier Anal. Appl. **21** (2015), 318–341.
- [BSS] N. Bez, H. Saito and M. Sugimoto, *Applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and trace estimates*, (preprint).
- [BMS] N. Bez, S. Machihara and M. Sugimoto, *Extremisers for the trace theorem on the sphere*, (preprint).
- [RS] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Trace theorems: critical cases and best constants*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 227–237.