

Scattering theory for Hartree equations with inverse-square potentials

鈴木 敏行¹

次の逆 2 乗型ポテンシャル $a|x|^{-2}$ つきの Hartree 方程式を考察する.

$$(\text{HE})_a \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\Delta + \frac{a}{|x|^2} \right) u + u(|x|^{-\gamma} * |u|^2) & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, $N \geq 3$, $a > -(N-2)^2/4$, $0 < \gamma < \min\{4, N\}$ とする.

まず, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ の場合, 初期値問題 $(\text{HE})_a$ は大域的弱解 $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ が一意的に存在することが Suzuki [6] により示されている. a の条件は, $P_a := -\Delta + a|x|^{-2}$ の $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ における非負自己共役性 (定義域 $H^1(\mathbb{R}^N)$) に由来する. また, virial 等式 (Suzuki [7] により正当化) を用いることで $u_0 \in \Sigma^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N) \cap D(|x|)$ のとき大域的弱解は $C(\mathbb{R}; \Sigma^1(\mathbb{R}^N))$ に属することもわかる.

散乱問題として今回考察するのは次の 2 点である.

(P1) 漸近完全性. 任意の $(\text{HE})_a$ の弱解 $u(t)$ に対し次の極限が存在するか?

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S_a(-t)u(t) = \varphi, \quad \text{where } S_a(t) := \exp(-itP_a);$$

(P2) 波動作用素の存在. 任意の φ に対し (1) を満たす弱解 $u(t)$ が存在するか?

非線形 Schrödinger 方程式に対する散乱問題の研究は数多くある. $(\text{HE})_a$ の $a = 0$ に対するものとして Hayashi-Tsutsumi [3] が挙げられる. また, ポテンシャル項を含む問題については Hayashi-Ozawa [2] が $a|x|^{-\theta}$ ($a > 0$, $1 < \theta < 2$) の場合に考察している. ここで, **(P2)** を考察する際に終値条件 (1) を満たす解を構成する, 終値問題を解く必要がある. Hayashi-Tsutsumi [3] では, 適当な変換を用いることにより終値問題を別の偏微分方程式の初期値問題に変換することで進めた. この方法は, べき乗型非線形項 ($|u|^{p-1}u$) の場合にも行われており, Cazenave-Weissler [1] などの研究がある.

Hayashi-Ozawa [2] において除外されていた $\theta = 2$ の場合の考察を試みるのが最大の目標である. $(\text{HE})_a$ に対する散乱問題を考えるにあたり, [3, 2, 1] などで使われる縮小写像の原理を適用する. ところで, 初期値問題に対しては Okazawa-Suzuki-Yokota [4] において適用した場合の考察がされている. この場合, 非線形項がべき乗型 $|u|^{p-1}u$ の場合の適切性に

$$a > \left[\frac{N(p-1)}{2(p+1)} \right]^2 - \frac{(N-2)^2}{4}$$

¹ 神奈川大学 工学部 (非常勤講師), 工学院大学 基礎・教養教育部門 (非常勤講師)
e-mail: t21.suzuki@gmail.com

という制限がつく．これは Strichartz 評価

$$\|\nabla S_a(t)u_0\|_{L^\tau(\mathbb{R};L^\rho)} \leq C_\tau \|\nabla u_0\|_{L^2} \quad \left(\frac{2}{\tau} + \frac{N}{\rho} = \frac{N}{2}\right)$$

の成立条件が

$$a > \frac{4}{\tau^2} - \frac{(N-2)^2}{4}$$

となるためである．この制限についてはその後、エネルギー法を用いた Okazawa-Suzuki-Yokota [5] により $a > -(N-2)^2/4$ まで改善された．更に、エネルギー空間を変えることで $a = -(N-2)^2/4$ の場合にも適切性がいえる (Suzuki [8]).

そこで、縮小写像の原理の適用方法を見直すことにより、 a や γ にできるだけ余計な制限を付けることなく散乱問題を考察した．

主結果.

以下、 $(\mathbf{HE})_a$ の解は $C(\mathbb{R}; \Sigma^1(\mathbb{R}^N))$ に属するものとする．

また、 $a > -(N-2)^2/4$ とする．

(i) $0 < \gamma \leq 1$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_a(-t)u(t) = \varphi \quad \text{strongly in } L^2(\mathbb{R}^N) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0.$$

従って、0 でない任意の $(\mathbf{HE})_a$ の解 $u(t)$ は $S_a(t)\varphi$ に漸近しない．

(ii) $1 < \gamma < 2$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_a(-t)u(t) = \varphi \quad \text{strongly in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

つまり、任意の $(\mathbf{HE})_a$ の解は $S_a(t)\varphi$ に $(L^2(\mathbb{R}^N))$ の位相で漸近する．

(iii) $1 < \gamma < 2$ のとき、任意の $\varphi \in \Sigma^1(\mathbb{R}^N)$ に対し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_a(-t)u(t) = \varphi \quad \text{strongly in } \Sigma^1(\mathbb{R}^N)$$

となる $(\mathbf{HE})_a$ の解が一意的に存在する．

基本的な議論は Hayashi-Tsutsumi [3] による議論と並行してできる．ただし、今回は Cazenave-Weissler [1] と同様な pseudoconformal transform

$$v(t, x) = (1-t)^{-N/2} \exp\left(\frac{-i|x|^2}{4(1-t)}\right) u\left(\frac{t}{1-t}, \frac{x}{1-t}\right)$$

を用いた． v が満たす方程式は

$$i \frac{\partial v}{\partial t} = P_a v + (1-t)^{\gamma-2} v (|x|^{-\gamma} * |v|^2), \quad t \in [0, 1]$$

となり, u の終値条件の代わりに $v(1) = S_a(1)[e^{-i|x|^2/4}\varphi] \in \Sigma^1(\mathbb{R}^N)$ という v の初期条件を与えて解けばよい.

補足. $2 \leq \gamma < \min\{4, N\}$ の場合にも (ii) が得られている. また, $\gamma = 2$ の場合は変換で方程式は不変なので, 自動的に (iii) が得られる. 更に, $2 < \gamma < \min\{4, N\}$ の場合には a に制限を課せば (iii) が得られる.

参考文献

- [1] T. Cazenave, F. B. Weissler, *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 75–100.
- [2] N. Hayashi, T. Ozawa, *Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbb{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré **48** (1988), 17–37.
- [3] N. Hayashi, Y. Tsutsumi, *Scattering theory for Hartree type equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré **46** (1987), 187–213.
- [4] N. Okazawa, T. Suzuki, T. Yokota, *Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potentials*, Appl. Anal. **91** (2012), 1605–1629.
- [5] N. Okazawa, T. Suzuki, T. Yokota, *Energy methods for abstract nonlinear Schrödinger equations*, Evol. Equ. Control Theory **1** (2012), 337–354.
- [6] T. Suzuki, *Energy methods for Hartree type equation with inverse-square potentials*, Evol. Equ. Control Theory, **2** (2013), 531–542.
- [7] T. Suzuki, *Blowup for nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potentials*, Differ. Equ. Appl., **6** (2014), 309–333.
- [8] T. Suzuki, *Solvability of nonlinear Schrödinger equations with some critical singular potential via generalized Hardy-Rellich inequalities*, Funkcial. Ekvac., accepted.