Applications of generalized trigonometric functions to means

竹内 慎吾 (芝浦工大システム理工)*

1. 1パラメータの一般化三角関数

$1 < p < \infty$ とする．一般化三角関数 $\sin_p x$ は

$$\sin_p^{-1} x := \int_0^x \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 \le x \le 1$$

の逆関数として定義される．また一般化円周率 π_p は

$$\pi_p := 2\sin_p^{-1} 1 = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}}$$

で定義される．一般化三角関数と一般化円周率は p-Laplacian の斉次固有値問題の研究に 100 年ほど前から現れており，現在も固有値問題や半分線形方程式の振動問題などの解析に利用されている．最近では区間 $(0,1)$ 上の任意の Lebesgue 空間の関数系 $\{\sin_p n\pi_p x\}_{n=1}^{\infty}$ がなす基底に関する P. Binding 等による研究や，$\sin_p x$ を含む一般化三角関数の基本評価に関する M. Vuorinen 等による研究がある．

特に $p=2$ のときは $\sin_2 x = \sin x$, $\pi_2 = \pi$ となる．R.P. Brent (1976) と E. Salamin (1976) は，Gauss (1799) が発見した算術幾何平均と楕円積分の関係式と，Legendre (1811) による第1種完全楕円積分 $K(k)$ と第2種完全楕円積分 $E(k)$ の関係式とを組み合わせて π の計算公式を得た．この公式は π の数値計算で有名な Gauss-Legendre アルゴリズム（または Brent-Salamin アルゴリズム）の基礎となっている．またその証明は，前提としている楕円積分の諸性質を導くには少々工夫を要するが，それ以外は特に難しい議論を必要とせず基本的であり，多くの文献で紹介されている（例えば [2]）．

これに示唆を受けて，2014年秋の学会において講演者は，Legendre 形式を $\sin_p x$ で与えた第1種・第2種 “完全 p 楕円積分”：

$$K_p(k) := \int_0^{\frac{\pi_p}{2}} \frac{d\theta}{(1-k^p \sin_p^p \theta)^{\frac{1}{p^*}}}, \quad E_p(k) := \int_0^{\frac{\pi_p}{2}} (1-k^p \sin_p^p \theta)^{\frac{1}{p}}\, d\theta$$

を導入し，これらを用いて π_p の Brent-Salamin 型計算公式を導出した．ここで $p^* := p/(p-1)$ である．ただし現在までに得られているのは $p = 2, 3, 4$ の場合のみで，それ以外の場合は未解決である．

以下その結果を述べる．$a \ge b > 0$ とする．数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 = a$, $b_0 = b$ かつ

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{(a_n^2 + a_n b_n + b_n^2) b_n}{3}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

と定義する．$n \to \infty$ のとき $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の値に収束し，その極限値を $M_3(a,b)$ と表す．このとき次が成り立つ．

本研究は科研費 (課題番号:24540218) の助成を受けたものである。
* 〒 337-8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307 芝浦工業大学 システム理工学部
e-mail: shingo@shibaura-it.ac.jp

定理 1. $a=1,\ b=1/\sqrt[3]{2}$ とし，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を (1) で定義する．このとき π_3 は

$$\pi_3 = \frac{2M_3\left(1, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2}{1-2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(a_n+c_n)c_n}$$

で与えられる．ここで $c_n=\sqrt[3]{a_n^3-b_n^3}\ (n=0,1,2,\dots)$ である．

同様に $p=4$ の計算公式が得られる．今度は数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を $a_0=a,\ b_0=b$ かつ

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n^2+3b_n^2}{4}}, \quad b_{n+1}=\sqrt[4]{\frac{(a_n^2+b_n^2)b_n^2}{2}}, \quad n=0,1,2,\dots \tag{2}$$

と定義する．$n\to\infty$ のとき $\{a_n\},\ \{b_n\}$ は共通の値 $M_4(a,b)$ に収束する．

定理 2. $a=1,\ b=1/\sqrt[4]{2}$ とし，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を (2) で定義する．このとき π_4 は次で与えられる：

$$\pi_4 = \frac{2M_4\left(1, \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}{1-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}\sqrt{a_n^4-b_n^4}}$$

証明では $K_p,\ E_p$ に対し次の補助的な積分値を導入する：$\cos_p\theta := (1-\sin_p^p\theta)^{\frac{1}{p}}$ とし

$$I_p(a,b) := \int_0^{\frac{\pi_p}{2}} \frac{d\theta}{(a^p\cos_p^p\theta+b^p\sin_p^p\theta)^{\frac{1}{p^*}}},$$

$$J_p(a,b) := \int_0^{\frac{\pi_p}{2}} (a^p\cos_p^p\theta+b^p\sin_p^p\theta)^{\frac{1}{p}}\,d\theta.$$

結果が $p=3,\ 4$ に限定されているのは以下の理由による．証明では (1) に対して数列 $\{a_nI_3(a_n,b_n)\}$ が定数列であること，および (2) に対して数列 $\{a_n^2I_4(a_n,b_n)\}$ が定数列であることが鍵となる．それらは超幾何関数に関する Ramanujan の二つの変換公式から示されるのだが，他の p の場合に対応する変換公式は知られていないからである．

2. 2パラメータの一般化三角関数

$p^*:=p/(p-1)>0$（$p<0$ でもよい），$q>0$ とする．一般化三角関数 $\sin_{pq}x$ は

$$\sin_{pq}^{-1}x := \int_0^x \frac{dt}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0\le x\le 1$$

の逆関数として定義される．また一般化円周率 π_{pq} は

$$\pi_{pq} := 2\sin_{pq}^{-1}1 = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^q)^{\frac{1}{p}}} = \frac{2}{q}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p^*}\right)$$

で定義される．ただし B はベータ関数であるとし，必要ならば $\sin_{pq}x$ は $\sin x$ のように周期 $2\pi_{pq}$ の周期関数に拡張しておくとする．$\sin_{pp}x=\sin_p x,\ \pi_{pp}=\pi_p$ である．

$\sin_{pq} x$ と π_{pq} を用いると，p-Laplacian の非斉次固有値問題 $-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{q-2}u$ の解の具体的な表示が可能になる．この固有値問題自体は Ôtani [4] が変分法により解集合の構造を解明し，それを受けて Drábek-Manásevich [3] が（上記とは定義が若干異なる）$\sin_{pq} x$ を導入し固有値と固有関数の組を有限個のパラメータで表示し解集合の構造がより明快になった．

[3] でこれが導入されて以来，関数系 $\{\sin_{pq} n\pi_{pq}x\}_{n=1}^{\infty}$ のなす基底に関する D.E. Edmunds 等による研究や，摂動された非斉次固有値問題 $-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{q-2}u(1-|u|^q)$ の解集合を記述するために，Legendre 形式を $\sin_{pq} x$ で与えた第1種不完全楕円積分の逆関数である一般化 Jacobi 楕円関数 $\mathrm{sn}_{pq}\, x$ を導入した研究 [5]，およびその関数系がなす基底の研究 [6] がある．また E. Neuman や Vuorinen 等がこれらの関数の様々な基本評価を与えている．

最近，$\sin_{pq} x$ の新たな応用として第 1 種 “完全 (p,q) 楕円積分”：

$$K_{pq}(k) := \int_0^{\frac{\pi_{pq}}{2}} \frac{d\theta}{(1-k^q \sin_{pq}^q \theta)^{\frac{1}{p^*}}}, \quad 0 \le k < 1$$

を用いて，ある種の平均に関する定理に別証明を与えられたので以下に紹介する．

$0 < p < \infty$ とする．Bhatia-Li [1] は正数 $a,\ b$ に対して次の値 $M_p(a,b)$ を考えた：

$$\frac{1}{M_p(a,b)} := c_p \int_0^{\infty} \frac{dt}{[(t^p+a^p)(t^p+b^p)]^{\frac{1}{p}}}.$$

ここで $1/c_p := \int_0^{\infty}(1+t^p)^{-2/p}\,dt$ である．$p=1,\ 2$ のときはそれぞれ対数平均，算術幾何平均と一致することが知られており，$M_p(a,b)$ はそれらを補間する平均である．また正数 $a,\ b$ に対して次の値 $D_p(a,b)$ はベキ差平均とよばれる：

$$D_p(a,b) := \frac{p-1}{p}\frac{a^p-b^p}{a^{p-1}-b^{p-1}}\ (a \ne b), \quad D_p(a,a) := a.$$

$M_p(a,b)$ と $D_p(a,b)$ はある意味で類似しており，両者の関係を調べることは興味深い．Bhatia と Li は巧妙だが煩雑な式変形により，$1/M_p(a,b)$ と $1/D_p(a,b)$ の $\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}$ に関するベキ級数展開を導き係数を比較することで次の結果を得た．

定理（Bhatia-Li [1]）． 異なる正数 $a,\ b$ に対して， (i) $0<p<1$ ならば $M_p(a,b) > D_p(a,b)$ (ii) $p=1$ ならば $M_1(a,b) = D_1(a,b)$ (iii) $p>1$ ならば $M_p(a,b) < D_p(a,b)$.

しかし彼らはそれらのベキ級数が実は超幾何級数であることに注意しておらず，それが原因で両者の類似性が証明に活かされていないように思われる．我々の完全 (p,q) 楕円積分を用いると超幾何級数への移行がスムーズになり，その結果，両者の類似性がより鮮明になり定理は自明なものとなる．

参考文献

[1] R. Bhatia and R.C. Li, *Commun. Stoch. Anal.* **6** (2012), no. 1, 15–31.
[2] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM*, A Wiley-Interscience Publication, 1987.
[3] P. Drábek and R. Manásevich, *Differential Integral Equations* **12** (1999), 773–788.
[4] M. Ôtani, *Nonlinear Anal.* **8** (1984), 1255–1270.
[5] S. Takeuchi, *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2012), no. 1, 24–35.
[6] S. Takeuchi, *Commun. Pure Appl. Anal.* **13** (2014), no. 6, 2675–2692.