

放物型方程式の観点から見た複素 Ginzburg-Landau 方程式の解の爆発*

富所 拓也
(東京理大・理 M2)

次の複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGL) の初期値境界値問題について考える:

$$(CGL) \quad \begin{cases} e^{-i\theta} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^\alpha u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

ここで $i = \sqrt{-1}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha > 0$, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) の有界領域, または, $\Omega = \mathbb{R}^N$ とし, 初期値 u_0 は既知の複素数値関数, u は未知の複素数値関数とする.

先行結果 (CGL) の解の有限時刻での (L^∞ ノルムの) 爆発について, 以下の結果が知られている:

- $\Omega = \mathbb{R}^N$ とする. 初期値 u_0 が $E(u_0) < 0$ (E の定義は後述) を満たすならば, 解 u は有限時刻で爆発する (Cazenave-Dickstein-Weissler [1]).
- $\theta = 0$, $\alpha \leq \frac{4}{N-2}$, Ω は有界とする. 初期値 u_0 が $E(u_0) < d$, $I(u_0) < 0$ を満たすならば, 解 u は有限時刻で爆発する (Payne-Sattinger [2]).

但し, 汎関数 E, I と定数 d は以下により定義する:

$$\begin{aligned} E(w) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \frac{1}{\alpha+2} \int_{\Omega} |w|^{\alpha+2}, \\ I(w) &:= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \int_{\Omega} |w|^{\alpha+2}, \\ d &:= \inf\{E(w) \mid w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, I(w) = 0\}. \end{aligned}$$

本研究の主結果 [1] では, 解の最大存在時刻についての研究に重点が置かれていて, (CGL) が [2] で示されたような放物型方程式の性質をもっているかについては明示されてこなかった. 本研究では, 以下の定理のように (CGL) の解が実際に放物型方程式の性質を幾つか有していることが解明できた.

定理 1.

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha < \frac{4}{N}$, $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ とする. このとき初期値 u_0 が $E(u_0) < 0$ を満たすならば, ある $T > 0$ と (CGL) の解 u が存在して, $\limsup_{t \rightarrow T} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \infty$ が成り立つ.

定理 2.

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha \leq \frac{4}{N-2}$ (但し $N = 1, 2$ のときは $\alpha < \infty$), Ω は有界とする. このとき初期値 u_0 が $E(u_0) < d$, $I(u_0) < 0$ を満たすならば, (CGL) の解 u は有限時刻で爆発する.

参考文献

- [1] T. Cazenave, F. Dickstein, F. B. Weissler, *Finite-time blowup for a complex Ginzburg-Landau equation*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), 244–266.
- [2] L. E. Payne, D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math. **22** (1975), 273–303.

*本講演は横田 智巳氏 (東京理大・理) との共同研究に基づく.