半空間上の Vlasov-Poisson 系の可解性について[*]

都築　寛[†]　(東京理科大学大学院 理学研究科 D3)

1　導入

本講演では $T>0$ に対して次の Vlasov–Poisson 系 (P) を扱う:

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{cases}
-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \displaystyle\sum_{\beta=\pm1} \beta \int_{\mathbb{R}^3} f^\beta(x,p,t)\,dp, & (x,t)\in\mathbb{R}^3_+\times(0,T),\\
\dfrac{\partial f^\beta}{\partial t} + \dfrac{1}{m_\beta}\left(p, \nabla_x f^\beta\right) + \beta e\left(-\nabla_x\varphi + \dfrac{1}{m_\beta c}[p, B(x)], \nabla_p f^\beta\right) = 0, & \\
\qquad (x,p,t)\in\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3\times(0,T),\quad \beta=\pm1, & \\
f^\beta(x,p,0) = f^\beta_0(x,p), & (x,p)\in\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3,\quad \beta=\pm1,\\
\varphi(x,t)|_{x_1=0} = 0, & x'=(x_2,x_3)\in\mathbb{R}^2,\quad t\in(0,T).
\end{cases}
$$

ただし, $\mathbb{R}^3_+ := (0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ であり, $(\cdot,\cdot)$, $[\cdot,\cdot]$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 上の内積, 外積を表す. また, $\varphi=\varphi(x,t)\in\mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x,p,t)\in\mathbb{R}$ は未知関数であり, f^β は時刻 $t\in(0,T)$, 位置 $x\in\mathbb{R}^3_+$ における運動量 $p\in\mathbb{R}$ の正電荷密度 $(\beta=+1)$, 負電荷密度 $(\beta=-1)$ を表し, φ は電位を表す. また, $B=B(x)\in\mathbb{R}^3$ は磁場, e は陽子 (電子) 一つの電荷の大きさ, m_β は荷電粒子 ($\beta=+1$ の場合は陽イオン, $\beta=-1$ の場合は電子) 一つの質量 $(m_{-1}<m_{+1})$, c は光速を表し, $f^\beta_0 = \beta^\beta_0(x,p)\in\mathbb{R}$ を含めて全て既知である.

この問題は, 制御熱核融合炉におけるプラズマを記述したモデルである. プラズマは非常に高温であるため, 接触によりその領域の境界である容器を融かしてしまうことを防がなくてはならない. 実際の物理現象では, 磁場によってプラズマの動きを制御することで, プラズマと境界に一定の間隔を保つことが可能となる.

Skubachevskii [1] によって, 時刻 T が小さい場合 (第 2 節の (2.4) を見よ) で問題 (P) の解の存在が保証されている. これは, 上記で述べたようなプラズマと境界の間に一定の距離を保つという状況が時刻 T まで数学的に保証されていることを意味するが, その物理的観点から T をできるだけ大きくとれることが望まれる. 本講演では主に (P) の解の存在のための仮定における上記の T の小ささを弱めることを目指す.

2　先行研究と目的

(P) の第 2,3 方程式は特性曲線法により各 x,p,t に対する以下の問題 $\{(2.1), (2.2)\}$ に帰着され, (P) の解の存在に向けた計算の大部分が (2.1) を扱うことに集約される:

$$
(2.1)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dX^\beta_\varphi}{dt}(\tau) = \dfrac{1}{m_\beta}P^\beta_\varphi(\tau), & \tau\in(0,t),\quad \beta=\pm1,\\
\dfrac{dP^\beta_\varphi}{dt}(\tau) = -\beta e\nabla_x\varphi(X^\beta_\varphi,\tau) + \dfrac{\beta e}{m_\beta c}[P^\beta_\varphi, B(X^\beta_\varphi)], & \tau\in(0,t),\quad \beta=\pm1,
\end{cases}
$$

$$
(2.2)\qquad \left(X^\beta_\varphi(t), P^\beta_\varphi(t)\right) = (x,p)\,,\qquad \beta=\pm1.
$$

---

[*]本研究は Alexander Leonidovich Skubachevskii 教授 (Peoples' Friendship University of Russia) との共同研究に基づく.

[†]yutack1296@gmail.com

Definition 2.1. $T>0$, $\sigma\in(0,1)$ とする．$(\varphi,\{f^\beta\})\in C([0,T];C^{2+\sigma}(\overline{\mathbb{R}^3_+}))\times C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])^2$ が問題 (P) の古典解である : $\Longleftrightarrow$ $(\varphi,\{f^\beta\})$ が (P) と次を満たす:

$$\varphi(x,t)\to 0 \text{ as } |x|\to\infty \text{ for all } t\in[0,T],\quad \Delta\varphi\in C([0,T];C^\sigma_c(\overline{\mathbb{R}^3_+})).$$

さて, $\delta,\varkappa,\rho>0$ を固定して以下の条件を仮定する．

(A1) $\mathcal{D}^\beta:=\operatorname{supp} f^\beta_0\subset(\mathbb{R}^3_\delta\cap B_\varkappa)\times B_\rho=:\Omega$;

(A2) $B(x)=(0,0,h)$ for $x_1\in[\delta/4,\delta]$ ($h>16c\rho/e\delta$ は定数).

ただし, $\mathbb{R}^3_\delta:=(\delta,\infty)\times\mathbb{R}^2$, $B_r:=\{p\in\mathbb{R}^3\mid |p|<r\}$ である．上記の仮定は第 1 節で述べたプラズマの動く範囲 $\mathcal{D}^\beta$ と境界 $\partial\Omega$ の間隔を一定に保つことと, それを磁場 B で制御するという物理現象に由来する．また, $\delta_0>0$ を次のように定める．$(x,p)\in\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3$ に対して, 問題 $\{(2.1),\ (X^\beta_\varphi(0),P^\beta_\varphi(0))=(x,p)\}$ の解 $(X^\beta_\varphi(t),P^\beta_\varphi(t))$ を $S^\beta_{\varphi,t}(x,p)$ とおき, $\mathcal{D}^\beta_{\varphi,t}:=S^\beta_{\varphi,t}(\mathcal{D}^\beta)$, $\Omega^\beta_{\varphi,t}:=S^\beta_{\varphi,t}(\Omega)$ とおく．ここで

$$\delta_0:=\min_{\beta=\pm1}\inf_{0<t<T}\operatorname{dist}(\mathcal{D}^\beta_{0,t},\partial\Omega^\beta_{0,t}).$$

上記の準備の下で, 次の結果が知られている:

Theorem 2.1 ([1])**.** *$T>0$, $\sigma\in(0,1)$, $\delta,\varkappa,\rho>0$ とする．$f^\beta_0\in C^2_c(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $B\in(C^2(\mathbb{R}^3))^3$ が* **(A1)**, **(A2)** *と次の (2.3) を満たすとする :*

$$\|f^\beta_0\|_{C^2(\mathbb{R}^3_+)}<\min\{R\varepsilon_1,\varepsilon_2\}. \tag{2.3}$$

ここで $R>0$ は次を満たす定数とする :

$$2eTR\exp(a_0T)<\min\left\{\frac{\delta}{8},\rho,\frac{\delta_0}{8}\right\},\qquad 6T^2e^2R^2<\rho^2, \tag{2.4}$$

ただし, $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ は $e,T,\delta,\delta_0,\rho,B,\sigma$ にのみ, a_0 は e,m_{-1},c,ρ,B にのみ依存する定数である．このとき, (P) の古典解 $(\varphi,\{f^\beta\})\in C([0,T];C^{2+\sigma}(\overline{\mathbb{R}^3_+}))\times C^1(\overline{\mathbb{R}^3_+}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])^2$ で,

$$\|\varphi\|_{C([0,T];C^{2+\sigma}(\mathbb{R}^3_+))}\le R \tag{2.5}$$

となるものが一意的に存在する．さらに $\operatorname{supp} f^\beta(\cdot,\cdot,t)\subset(\mathbb{R}^3_{5\delta/8}\cap B_{\varkappa_\beta})\times B_{2\rho}$ for $t\in[0,T]$. ただし, $\varkappa_\beta:=\varkappa+2T\rho/m_\beta$.

上記の結果において, 条件 (2.4) の一つ目の不等式の左辺は時刻 T に関して指数増大するため, R が小さくない場合は T を非常に小さくとらなければならない. しかし第 1 節で述べたように物理的観点から T が小さくなることは極めて不自然であり, 条件 (2.4) を取り除くか弱めることが目的となる. ここでいくつか目的を提示する:

目的 1. f^β_0, B の属するクラスを弱める．
目的 2. 初期関数 f^β_0 の小ささの仮定 (2.3) を弱める．
目的 3. ((2.3) に現れる R と) 時刻 T の小ささの仮定 (2.4) を弱める．
目的 4. 一意性が成立する φ の条件 (2.5) を弱める．

本講演では上記の目的に対して得られている結果のうち, 主に目的 3 について報告する．

References

[1] A. L. Skubachevskii, *Initial–boundary value problems for the Vlasov–Poisson equations in a half-space*, Proc. Steklov Inst. Math., **283** (2013), 197–225.