

Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity ¹

山口 崇博

(東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 修士 2 年)

導入 . 本研究では, double power nonlinearity を持つ次の非線形 Schrödinger 方程式に対する定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ の強不安定性について考える :

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - a|u|^{p-1}u - b|u|^{q-1}u, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N.$$

ただし, $a, b > 0$, $1 < p < q < 2^* - 1$ とし, $2^* = 2N/(N-2)$ ($N \geq 3$), $2^* = \infty$ ($N = 1, 2$) とする. ここで, $\omega > 0$ とし, ϕ を定常問題 (SP) の非自明解とする :

$$(SP) \quad -\Delta\phi + \omega\phi - a|\phi|^{p-1}\phi - b|\phi|^{q-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

また, (SP) の基底状態解とは, $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上の作用 S_ω を

$$S_\omega(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{a}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{b}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1} = E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

として定めたとき, (SP) の非自明解の中で作用 S_ω を最小とする解のことである. (SP) の基底状態解全体の集合を $\mathcal{G}_\omega$ とする. 基底状態解の存在はよく知られている. 今後, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする.

軌道安定性と強不安定性 . (NLS) の初期値問題の局所適切性はエネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ において成立する. そして, この適切性の下で定在波解の安定性は議論出来る. 今回, 取り扱う安定性として, 軌道安定性と強不安定性がある. 定在波解 $e^{i\omega t}\phi(x)$ が軌道安定であるとは次が成り立つことをいう: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|u_0 - \phi\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在して, 次が成り立つ:

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N} \|u(t) - e^{i\theta}\phi(\cdot + y)\|_{H^1} < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

定在波解 $e^{i\omega t}\phi$ が軌道安定でないとき, $e^{i\omega t}\phi$ は軌道不安定であるという. また, $e^{i\omega t}\phi$ が強不安定であるとは, 次が成り立つことをいう: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して, $\|u_0 - \phi\|_{H^1} < \varepsilon$ が成り立ち, $u(0) = u_0$ となる (NLS) の解 $u(t)$ は有限時間で爆発する. 定在波解は, 強不安定であれば軌道不安定である.

先行研究 . $1 + 4/N \leq p < q < 2^* - 1$ のとき, 任意の $\omega > 0$ に対して定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の強不安定性は示されている [1]. また, $1 < p < 1 + 4/N < q < 2^* - 1$ のとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は十分大きな $\omega > 0$ に対して軌道不安定であり [3], 十分小さな $\omega > 0$ に対しては軌道安定であることが知られている [2]. しかしながら, 十分大きな $\omega > 0$ に対して, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は強不安定であるかどうかはわかっていなかった. 今回の主結果は, これに対する答えを与えるものである.

主定理 . $1 < p < 1 + 4/N < q < 2^* - 1$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする. このとき, ある $\omega_1 > 0$ が存在して, 任意の $\omega \in (\omega_1, \infty)$ に対して, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は強不安定である.

定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の強不安定性の証明は, (NLS) の解が爆発するような初期値の集合を, 基底状態解 ϕ_ω の付近で構成することにより成される. 爆発解の構成は, 基底状態解の変分的特徴付けとスケール変換 $v^\lambda(x) = \lambda^{N/2}v(\lambda x)$ に対するエネルギーの関数 $\lambda \mapsto E(v^\lambda)$ の形状からわかる情報, そして virial identity を用いて行われる. 今回の場合, $\lambda \mapsto E(v^\lambda)$ は $1 + 4/N \leq p < q < 2^* - 1$ の場合と違い, 2 つの臨界点を持ち, 従来の方法では定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の強不安定性を示すことは出来ない. そこで, 我々は Jian Zhang(張健)[5] のアイデアを改良し, これを示した [4].

References

- [1] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981) 489–492.
- [2] R. Fukuizumi, *Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Adv. Math. Sci. Appl. **13** (2003) 549–564.
- [3] M. Ohta, *Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.
- [4] M. Ohta and T. Yamaguchi, *Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, preprint, arXiv:1407.0905.
- [5] J. Zhang, *Cross-constrained variational problem and nonlinear Schrödinger equation*, Foundations of computational mathematics (Hong Kong, 2000), 457–469, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

¹本講演は太田雅人先生との共同研究に基づく.