

準線形退化型拡散をもつ放物・楕円型 Keller-Segel 系の 時間局所的弱解の存在*

吉野 徳晃
(東京理大・理 M2)

1. 導入

本講演では、次の準線形退化放物・楕円型 Keller-Segel 系の初期値境界値問題 (KS) に対する時間局所的弱解の存在を考える:

$$(KS) \quad \begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \Delta D(b) + \nabla \cdot (K(b, c)b \nabla c) = 0 & \text{in } Q := (0, \infty) \times \Omega, \\ -\Delta c + c = b & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ b(0, x) = b_0(x), & x \in \Omega, \\ (-\nabla D(b) + K(b, c)b \nabla c) \cdot \nu = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \leq 3$) は C^2 級の有界領域で、 $b : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $c : Q \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数とし、 $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数とする。また、 $D \in C^1(\mathbb{R})$, $K \in C(\mathbb{R}^2)$ とする。

先行研究 [1, 2] では非線形極大単調作用素論を用いて

- $0 < D_0 \leq D'(r) \leq D_\infty < \infty$ ($r \in \mathbb{R}$) ($\exists D_0, D_\infty > 0$), $D(0) \geq 0$,
- $(r_1, r_2) \mapsto K(r_1, r_2)r_1 : \mathbb{R}^2$ 上 Lipschitz 連続

のときに、任意の $b_0 \in L^2(\Omega)$ に対して (KS) の時間局所的弱解の存在が得られていた。[1] の結果は初期値 b_0 の L^2 ノルムの小ささを仮定していたが、[2] ではその小ささの仮定を外すことが出来ていた。

今回は、 $b_0 \geq 0$ を仮定して、これら Lipschitz 性及び非退化性が成り立たないより一般の条件下で (KS) の時間局所的弱解の存在を考える。その際に [2] の結果が役に立つ。実際、解の存在を示すのに、(KS) に対する以下の近似問題を考える:

$$(KS)_{\varepsilon, \lambda} \quad \begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \Delta D_{\varepsilon, \lambda}(b) + \nabla \cdot (K_{\varepsilon, \lambda}(b, c)b \nabla c) = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ -\Delta c + c = b & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ b(0, x) = b_0(x), & x \in \Omega, \\ (-\nabla D_{\varepsilon, \lambda}(b) + K_{\varepsilon, \lambda}(b, c)b \nabla c) \cdot \nu = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\varepsilon, \lambda > 0$, $D_\varepsilon(r) := D(r + \varepsilon)$, $K_\varepsilon(r_1, r_2) := K(r_1 + \varepsilon, r_2)$,

$$D_{\varepsilon, \lambda}(r) := \begin{cases} D_\varepsilon(r) & (r \leq \lambda), \\ D_\varepsilon(\lambda) + (r - \lambda)D'_\varepsilon(\lambda) & (r \geq \lambda), \end{cases} \quad K_{\varepsilon, \lambda}(r_1, r_2) := \begin{cases} K(r_1, r_2) & (r_1, r_2 \leq \lambda), \\ K(\lambda, r_2) & (r_1 \geq \lambda, r_2 \leq \lambda), \\ K(r_1, \lambda) & (r_1 \leq \lambda, r_2 \geq \lambda), \\ K(\lambda, \lambda) & (r_1, r_2 \geq \lambda). \end{cases}$$

* 本講演は横田智巳氏（東京理大・理）との共同研究に基づく。

近似問題 (KS) $_{\varepsilon, \lambda}$ に対しては, [1] 又は [2] により近似解 $u_{\varepsilon, \lambda}$ の存在が保証される. ただし, [1] を使うと, 必要な初期値の小ささが ε に依存するため, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることができない. しかし, 初期値の小ささを必要としない [2] では極限移行を行うことができ, 次節の主結果を得た.

2. 主結果

まず D, K に対して以下のような条件を導入する:

$$(A1) \quad D'(r), D''(r) > 0 \quad (r > 0), \quad D(r) \geq d_1 r^m \quad (\exists m > N - 1, \exists d_1 > 0),$$

$$(A2) \quad D'^{\frac{1}{2}}(r) \leq d_2 \left(\int_0^r D'^{\frac{1}{2}}(s) ds + 1 \right), \quad r D'(r) \leq d_3 D(r) \quad (\exists d_2, d_3 > 0),$$

$$(A3) \quad (r_1, r_2) \mapsto K(r_1, r_2) r_1 \in C^1(\mathbb{R}^2);$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial r_1} (K(r_1, r_2) r_1) \right| \leq k_1 \left(D'^{\frac{1}{2}}(r_1) + 1 \right) \quad (\exists k_1 > 0),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial r_2} (K(r_1, r_2) r_1) \right| \leq k_2 \quad (\exists k_2 > 0),$$

$$(A4) \quad |K(r_1, r_2) r_1| \leq k_3 \left(r_1^\beta D'^{\frac{1}{2}}(r_1) + 1 \right) \quad (\exists \beta \in [0, 1 - \frac{2}{2^*}], \exists k_3 > 0).$$

ここで, 2^* は, Sobolev の埋め込み $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ に現れる指数である.

次に, 弱解の定義を与える.

定義. (b, c) が (KS) の時間局所的弱解であるとは, ある $T > 0$ が存在して以下の 3 条件を満たすことをいう:

$$(a) \quad 0 \leq b \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad D(b) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$(b) \quad c \in C([0, T]; H^2(\Omega)),$$

$$(c) \quad b(0) = b_0 \text{ かつすべての } (\psi_1, \psi_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ に対して } (b, c) \text{ は以下を満たす:}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{db}{dt}(t), \psi_1 \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla D(b) \cdot \nabla \psi_1 - \int_{\Omega} K(b, c) b \nabla c \cdot \nabla \psi_1 \\ + \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi_2 + \int_{\Omega} c \psi_2 = \int_{\Omega} b \psi_2. \end{aligned}$$

本講演で紹介する主結果は以下の通りである.

定理 (時間局所解の存在).

条件 $N \leq 3$ とし, (A1)–(A4) 及び $0 \leq b_0 \in L^2(\Omega)$ かつ $\int_0^{b_0} D(s) ds \in L^1(\Omega)$ を仮定する. このとき (KS) の時間局所的弱解が存在する.

(KS) の時間局所解の存在に対する多くの研究では, $b_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ が仮定されているが, 上の定理では, そのような滑らかさが不要である.

参考文献

- [1] G. Marinoschi, *Well-posedness for chemotaxis dynamics with nonlinear cell diffusion*, J. Math. Anal. Appl. **402** (2013), 415–439.
- [2] T. Yokota, N. Yoshino, *Existence of solutions to chemotaxis dynamics with Lipschitz diffusion and superlinear growth*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 756–774.