

外部領域における軸対称ナヴィエ・ストークス流の正則性

阿部 健 (ABE KEN) *

1 軸対称初期値に対する可解性

本講演では領域 $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ 上のナヴィエ・ストークス方程式の初期値境界値問題について考察する.

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p &= 0 \quad \text{in } \Pi \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Pi \times (0, T), \\ (D(u)n)_{\tan} &= 0, \quad u \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Pi \times (0, T), \\ u &= u_0 \quad \text{on } \Pi \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで $D(u) = (\nabla u + \nabla^T u)/2$ は変形テンソル, n を外向き単位法ベクトル, $f_{\tan}$ をベクトル場 f の境界 $\partial\Pi$ 上の接成分とする. 初期値 u_0 は軸対称として初期値境界値問題 (1.1) の時間大域可解性を考察する. 全空間上のベクトル場 u が軸対称であるとは, 回転行列 $A = (e_r(\eta), e_\theta(\eta), e_z)$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $e_r = {}^t(\cos \eta, \sin \eta, 0)$, $e_\theta = {}^t(-\sin \eta, \cos \eta, 0)$, $e_z = {}^t(0, 0, 1)$ に対して $u(x) = {}^t A u(Ax)$ が全ての $x \in \mathbb{R}^3$ と $\eta \in (0, 2\pi)$ に対して成立するときを言う. 軸対称ベクトル場 u は円柱座標 (r, θ, z) を用いて

$$u = u^r(r, z)e_r(\theta) + u^\theta(r, z)e_\theta(\theta) + u^z(r, z)e_z$$

と分解でき, 速度場 u に対して方位角成分 u^θ は旋回と呼ばれる. 軸対称旋回なし初期値に対しては, 全空間上方程式 (1.1) が時間大域的に解けることが知られており [5], [13] ([7]), 軸対称初期値に対する可解性は3次元初期値問題を解明する重要な手がかりになっている. 軸対称旋回なし初期値を含むより一般のクラスとして軸対称旋回あり初期値がある. この場合時間大域可解性は一般に不明で, これまで時間局所解に対するセリン型の正則性判定法 [10], [11] や渦度場の方角成分に対する正則性判定法 [1] が証明されている. またより最近ではチェン等 [3], [2] やコッホ等 [4] ([12]) によりタイプ I 爆発解の非存在が証明されている. ここで時刻 $t = T_*$ での爆発がタイプ I であるとは爆発解 u に対して評価

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\sqrt{T_* - t}}, \quad t < T_*$$

が成立することをいう. ルレイの爆発解の評価 [8] によりタイプ I 爆発は最小の爆発率になることが知られており, タイプ I 条件のもとでの正則性証明は重要である. 一方でタイプ I 条件のようなス

*京都大学理学部数学教室 (Department of Mathematics, Kyoto University)

ケール臨界評価がみたされるかは不明である. 解の上からの評価は最近レイ等 [6] ([9]) により研究されており, 対称軸付近でスケール優臨界評価

$$|u(x, t)| \leq C \frac{|\log r|^{\frac{1}{2}}}{r^2}, \quad r < 1, \quad t < T_*$$

が成立することが証明されている.

2 外部問題

本講演では外部領域 $\Pi^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r > \varepsilon\}$ 上滑り境界条件のもとでの初期値境界値問題 (1.1) を考える. 初期値境界値問題 (1.1) はラジゼンスカヤ [5] により研究されており, 軸対称旋回なし初期値に対して (1.1) の滑らかな時間大域解が存在し, さらに極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ で解は全空間上の滑らかな時間大域解に近づくことが証明されている. 軸対称旋回なし流では渦の引き延ばしが起こらないため渦度場は増大しないが, 旋回あり流では旋回の効果による渦伸長が起こるため対称軸付近の解析はより困難になる. 本講演では外部領域上の軸対称旋回あり流の渦身長項は非圧縮性と粘性の効果により線形項からの摂動として扱え, 解は時間大域的に (適当な意味で) 滑らかになることを報告する. また構成した時間大域解に対して渦度場の方位角成分のエネルギーノルムを評価し, 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ のエネルギーノルムが最大で $O(\varepsilon^{-2})$ 程度のオーダーで上から評価できることを報告する.

参考文献

- [1] D. Chae and J. Lee, *On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations*, Math. Z. **239** (2002), 645–671.
- [2] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai, and H.-T. Yau, *Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN **9** (2008), Art. ID rnn016, 31.
- [3] ———, *Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. II*, Comm. Partial Differential Equations **34** (2009), 203–232.
- [4] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin, and V. Šverák, *Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications*, Acta Math. **203** (2009), 83–105.
- [5] O. A. Ladyženskaya, *Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **7** (1968), 155–177.
- [6] Z. Lei, E. A. Navas, and Q. S. Zhang, *A priori bound on the velocity in axially symmetric Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **341** (2016), 289–307.
- [7] S. Leonardi, J. Málek, J. Nečas, and M. Pokorný, *On axially symmetric flows in $\mathbb{R}^3$* , Z. Anal. Anwendungen **18** (1999), 639–649.
- [8] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.
- [9] J. B. Loftus and Qi S. Zhang, *A priori bounds for the vorticity of axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, Adv. Differential Equations **15** (2010), 531–560.
- [10] J. Neustupa and M. Pokorný, *An interior regularity criterion for an axially symmetric suitable weak solution to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), 381–399.
- [11] ———, *Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component*, Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999), 2001, pp. 469–481.
- [12] G. Seregin and V. Šverák, *On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Partial Differential Equations **34** (2009), 171–201.
- [13] M. R. Ukhovskii and V. I. Iudovich, *Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space*, J. Appl. Math. Mech. **32** (1968), 52–61.