

Orbital instability of two-parameter family of bound states for Hamiltonian systems*

深谷 法良

(東京理科大学大学院理学研究科 数学専攻 修士2年)

X と H を $X \hookrightarrow H \simeq H^* \hookrightarrow X^*$ を満たす実 Hilbert 空間とする. 本研究では, 次の Hamilton 系について考える.

$$\frac{du}{dt}(t) = JE'(u(t)). \quad (1)$$

ここで, $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ は未知, $E \in C^3(X, \mathbb{R})$, $J \in \mathcal{L}(H)$ は全単射な歪対称作用素である. また, $J|_X \in \mathcal{L}(X)$ は全単射であるとする. $j = 0, 1$ に対して, $\{T_j(s) \in \mathcal{L}(H) \mid s \in \mathbb{R}\}$ を $T'_j(0)$ によって生成される H における 1 パラメーターユニタリ群とし, $T_0(s_0)T_1(s_1) = T_1(s_1)T_0(s_0)$ ($(s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$), $D(T'_j(0)) \supset X$, $T'_j(0)|_X \in \mathcal{L}(X, H)$ を満たすとする. $s = (s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $T(s) = T_0(s_0)T_1(s_1)$ と定め, E は $E(T(s)u) = E(u)$ ($u \in X$) を満たすとする. $u \in X$ に対して, $Q_j(u) = 2^{-1}(J^{-1}T'_j(0)u, u)_H$ と定める. また, 方程式 (1) の初期値問題は X において時間局所適切であるとし, E と Q_j は (1) の保存量であるとする. $T(\omega t)\phi$ ($\omega \in \mathbb{R}^2$, $\phi \in X$) の形をした (1) の解を束縛状態と呼ぶ. $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^2$, $u \in X$ に対して, $S_\omega(u) = E(u) - \sum_{j=0}^1 \omega_j Q_j(u)$ と定めると, $T(\omega t)\phi$ が (1) の解であることと $S'_\omega(\phi) = 0$ であることは同値である.

定義. 束縛状態 $T(\omega t)\phi$ が (軌道) 安定であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって, $u_0 \in X$ が $\|u_0 - \phi\|_X < \delta$ を満たすならば, $u(0) = u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在して

$$\sup_{t>0} \inf_{s \in \mathbb{R}^2} \|u(t) - T(s)\phi\|_X < \varepsilon$$

が成り立つことをいう. $T(\omega t)\phi$ が (軌道) 不安定であるとは, 安定でないことをいう.

さらに以下を仮定する.

- ある $\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω と C^2 級写像 $\Omega \ni \omega \mapsto \phi_\omega \in X$ があって, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $T'_0(0)\phi_\omega, T'_1(0)\phi_\omega$ は一次独立かつ $S'_\omega(\phi_\omega) = 0$.
- 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, 次を満たす $\chi_\omega \in X \setminus \{0\}$ と $\lambda_\omega < 0$ が存在する.
 - (i) $S''_\omega(\phi_\omega)\chi_\omega = \lambda_\omega\chi_\omega$,
 - (ii) $p \in X \setminus \{0\}$ が $(\chi_\omega, p)_H = (T'_0(0)\phi_\omega, p)_H = (T'_1(0)\phi_\omega, p)_H = 0$ を満たすならば, $\langle S''_\omega(\phi_\omega)p, p \rangle > 0$.

$\omega \in \Omega$ に対して, $d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega)$ と定める. Hesse 行列 $d''(\omega)$ が正の固有値を持つとき, 束縛

* 本講演は太田 雅人氏との共同研究に基づく

状態 $T(\omega t)\phi_\omega$ は安定であり, $d''(\omega)$ が負の固有値を 2 つ持つとき, $T(\omega t)\phi_\omega$ は不安定であることが [1] で示されている ([3] も参照せよ). しかし, $d''(\omega)$ が負の固有値と零固有値を持つときは安定であるかどうかは未解決であった. 本研究では, 次の結果を得た.

定理. $\omega \in \Omega$ とする. $d''(\omega)$ が負の固有値と零固有値を持つとし, 零固有値に関する固有ベクトルを $\xi \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, $\frac{d^3}{d\lambda^3}d(\omega + \lambda\xi)|_{\lambda=0} \neq 0$ ならば, 束縛状態 $T(\omega t)\phi_\omega$ は不安定である.

これは, [2] の結果を 2 パラメーターの場合に拡張したものと考えられる.

参考文献

- [1] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, II*, J. Funct. Anal. **94** (1990), 308–348.
- [2] M. Ohta, *Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 90–110.
- [3] M. Ohta, *Instability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, SUT J. Math. **50** (2014), 399–415.