

非線形波動と Klein-Gordon のある種の 連立方程式系に対する大域解の存在

片山 聡一郎 (大阪大学大学院理学研究科)

3 次元空間において次のような非線形双曲型方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta + m^2)u &= F(u, \partial u), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) &= \varepsilon f(x), \quad (\partial_t u)(0, x) = \varepsilon g(x).\end{aligned}$$

ここで $\partial u = (\partial_t u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \partial_{x_3} u)$ とし, 非線形項 $F = F(\lambda, \mu)$ は (λ, μ) の 2 次斉次多項式とする. また, $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ とし, $\varepsilon > 0$ は小さいパラメータとする. この方程式は $m > 0$ の場合は非線形 Klein-Gordon 方程式, $m = 0$ の場合は非線形波動方程式と呼ばれる.

線形の Klein-Gordon 方程式の解は $(1+t)^{-3/2}$ のオーダーで減衰するのに対して, 波動方程式の解は $(1+t)^{-1}$ でしか減衰しない. また Klein-Gordon 方程式のエネルギー評価は $\|u(t)\|_{L^2}$ および $\|\partial u(t)\|_{L^2}$ の評価を与えるのに対して, 波動方程式の場合は $\|\partial u(t)\|_{L^2}$ の評価のみしか与えないなど, Klein-Gordon と波動では性質が大きく異なる部分がある.

非線形 Klein-Gordon 方程式 ($m > 0$) の場合は, 小さな初期値に対して大域解が存在することが知られている (Klainerman [3], Shatah [6]). 他方, 非線形波動方程式 ($m = 0$) の場合は, 小さな初期値であっても有限時間で解が爆発するような 2 次の非線形項の存在が知られている. Klainerman [4] (および Christodoulou [1]) は非線形項が null 条件と呼ばれる条件を満たすならば小さな初期値に対して大域解が存在することを示した. null 条件の下では, $F = F(\partial u)$ となり, u 自身には F は依存しないことに注意しておく.

次に Klein-Gordon と波動の双方を含む連立系を考える. 簡単のため次の 2 成分系に限定するが, 一般のサイズの連立系も同様に扱える:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta + 1)v &= G(v, w, \partial v, \partial w), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ (\partial_t^2 - \Delta)w &= H(v, w, \partial v, \partial w) \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

ここで G, H はそれぞれの変数に関して 2 次斉次多項式とする. Katayama [2] は次の条件下で小さな初期値に対する大域解の存在を示した:

1. G, H とともに w 自身には依存しない: $G = G(v, \partial v, \partial w)$, $H = H(v, \partial v, \partial w)$.

2. H を

$$\begin{aligned} H &= H^K + H^{KW} + H^W \\ &:= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} A^{\alpha\beta} (\partial^\alpha v) (\partial^\beta v) + \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} B^{\alpha\beta} (\partial^\alpha v) (\partial^\beta w) \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} C^{\alpha\beta} (\partial^\alpha w) (\partial^\beta w) \end{aligned}$$

のように書いたとき (ただし $A^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$ は定数), H^W が null 条件を満たす.

この結果は非線形 Klein-Gordon 方程式に対する結果と, 非線形波動方程式解に対する結果を自然に含んでいる (後に別証明が LeFloch-Ma [5] で与えられている).

本講演では, 上とは別の条件の下で波動と Klein-Gordon の連立系に対する大域解の存在を示す. 具体的には, G が w 自身には依存しないという制約を緩めて, G が $w(\partial^\alpha w)$ ($|\alpha| = 1$) のような項を含む形で w に依存する場合を考え, その代わりに H^K , あるいは H^{KW} に制約を加えれば, 小さな初期値に対して大域解が存在することを示す.

参考文献

- [1] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267–282.
- [2] S. Katayama, *Global existence for coupled systems of nonlinear wave and Klein–Gordon equations in three space dimensions*, Math. Z. **270** (2012), 487–513.
- [3] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein–Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, 631–641 (1985).
- [4] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, in: Nonlinear Systems of Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Part 1, pp. 293–326, Lectures in Appl. Math. **23**, AMS, Providence, 1986.
- [5] P. G. LeFloch and Y. Ma, *The Hyperboloidal Foliation Method*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015.
- [6] J. Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, 685–696 (1985).