

Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with cubic interaction

数学専攻 川原 将太郎
指導教員 太田 雅人

本講演では太田先生との共同研究に基づくものである。次の非線形シュレディンガー方程式系の定在波解の安定性について調べる。

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 = -\partial_x^2 u_1 - \kappa_1 |u_1|^2 u_1 - \gamma \overline{u_1} u_2^2, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ i\partial_t u_2 = -\partial_x^2 u_2 - \kappa_2 |u_2|^2 u_2 - \gamma \overline{u_2} u_1^2, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $\kappa_1, \kappa_2, \gamma$ は正の定数とし, u_1, u_2 は複素数値の未知関数である。方程式系 (1) は 3 次の非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\partial_x^2 u - |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2)$$

を一般化したものである。エネルギー空間 $X = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ において, (1) の初期値問題の時間大域解の存在と一意性は保証されている ([1] 参照)。 $\omega > 0$ に対して $e^{i\omega t} \vec{\phi}(x)$ の形をした (1) の非自明解を定在波解という。

定義. 定在波解 $e^{i\omega t} \vec{\phi}$ が次を満たすとき安定であるという。

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $\vec{u}_0 \in X$ が $\|\vec{u}_0 - \vec{\phi}\|_X < \delta$ を満たすならば, 初期条件 $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ を満たす (1) の解 $\vec{u}(t)$ は

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2} \|\vec{u}(t) - e^{i\theta} \vec{\phi}(\cdot - y)\|_X < \varepsilon$$

を満たす。

$e^{i\omega t} \vec{\phi}$ が安定でないとき不安定であるという。

$\omega > 0$ に対して, $\varphi_\omega(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech} \sqrt{\omega} x$ とおくと, (2) の定在波解 $e^{i\omega t} \varphi_\omega$ は安定であることが知られている [2]。

$(\alpha, \beta) \in S_{\kappa_1, \kappa_2, \gamma} = \{(a, b) \in [0, \infty)^2 : \kappa_1 a^2 + \gamma b^2 = 1, \kappa_2 b^2 + \gamma a^2 = 1\}$ のとき, $e^{i\omega t}(\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$ は (1) の定在波解となる。本研究ではこの定在波解の安定性について以下の結果を得ることができた。

定理. $\omega > 0$, $(\alpha, \beta) \in S_{\kappa_1, \kappa_2, \gamma}$ に対して, $\Phi = (\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$ とする。このとき

- (i) $(\kappa_1, \kappa_2) \in (0, \gamma]^2 \setminus \{(\gamma, \gamma)\}$ のとき $e^{i\omega t} \Phi$ は安定である。
- (ii) $(\kappa_1, \kappa_2) \in [\gamma, \infty)^2 \setminus \{(\gamma, \gamma)\}$ のとき $e^{i\omega t} \Phi$ は不安定である。
- (iii) $\kappa_1 = \kappa_2 = \gamma$ のとき $e^{i\omega t} \Phi$ は次の意味で安定である。

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $\vec{u}_0 \in X$ が $\|\vec{u}_0 - \Phi\|_X < \delta$ を満たすならば, 初期条件 $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ を満たす (1) の解 $\vec{u}(t)$ は

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{(\theta, s, y) \in \mathbb{R}^3} \left\| \vec{u}(t) - e^{i\theta} \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \Phi(\cdot - y) \right\|_X < \varepsilon$$

を満たす。

参考文献

- [1] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations, Courant Lect. Notes Math. 10, Ams, Providence, RI, 2003.
- [2] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. 85(1982), no. 4, 549-561.