

複素 Ginzburg–Landau 方程式の解の消滅について *

森口 真至
(東京理大・理 M2)

次の複素 Ginzburg–Landau 方程式の初期値境界値問題 (CGL) について考える:

$$(CGL) \quad \begin{cases} u_t = e^{i\gamma_1} \Delta u - e^{i\gamma_2} |u|^{\sigma-2} u + \omega u + f(x, t), & (x, t) \in Q_T := \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

ここで $1 < \sigma < 2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\omega > 0$, Ω は C^2 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) の開集合とし, 初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$, 非斉次項 $f \in L^2(Q_T)$ は既知の複素数値関数とする. (CGL) の弱解の存在と一意性については Okazawa–Yokota [2] によって研究されている.

増大項がない場合 ($\omega = 0$ の場合) には Antontsev–Dias–Figueira [1] により, $\gamma_1 = \gamma_2$, Ω が有界のときの弱解 $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ の消滅について以下の結果が得られている:

$f = 0$ のとき: ある時刻 t^* が存在し, $u(x, t) = 0$, $x \in \Omega$, $t_* \leq t < T$.

$f \neq 0$ のとき: ある $t_f \in (0, T)$ と $\varepsilon > 0$ が存在し, $\int_\Omega |f(x, t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx \leq \varepsilon(t_f - t)_+^{\frac{n}{2} + \frac{\sigma}{2-\sigma}}$ ならば
 $u(x, t) = 0$, $x \in \Omega$, $t_f \leq t < T$.

本研究では, 増大項がある場合 ($\omega > 0$ の場合) にも (CGL) の解の消滅について解明できた. また, [1] では示されていなかった $\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$ の消滅のスピードについても考察した.

定理 1

u を (CGL) の弱解とする. $f = 0$ のとき, 定数 $C_1 > 0$ が存在し, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} < C_1$ ならば, ある t_* が存在して,

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t_* \leq t < T$$

が成り立つ. さらに, ある $t_0, M_{t_0}, \varepsilon_{t_0} > 0$ が存在して, $\int_\Omega |f(x, t)|^2 dx \leq \varepsilon_{t_0} (1 - e^{(1-\eta)\omega(t-t_0)})_+^{\frac{2\eta}{1-\eta}}$, $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq M_{t_0}$ ならば

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t_0 \leq t < T$$

が成り立つ. ここで, $\eta := \frac{(2-\sigma)n+4\sigma-4}{(2-\sigma)n+4}$ である.

定理 2

$|\tan \gamma_2| < \frac{2\sqrt{\sigma-1}}{2-\sigma}$, Ω は有界, u を (CGL) の弱解とする. 定理 1 において, さらに $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M_{t_0}$ を仮定する. $f = 0$ のとき, $t \leq t_*$ に対し, ある $C_2 > 0$ が存在して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\mu)} \geq C_2 \omega^{-1} (1 - e^{-2\omega(1-\mu)(t_*-t)})$$

が成り立つ. ここで, $\mu := \frac{(2-\sigma)n+2\sigma}{(2-\sigma)n+4}$ である. また, $f \neq 0$ のとき,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{a} e^{2\omega(t-t_0)} (1 - e^{-2(1-\mu)\omega t_0})^{-\frac{1}{1-\mu}} (e^{-2(1-\mu)\omega(t-t_0)} - 1)_+^{\frac{1}{1-\mu}}$$

を満たすような定数 $\tilde{a} > 0$ が存在する.

参考文献

- [1] S. Antontsev, J.-P. Dias, M. Figueira, *Complex Ginzburg–Landau equation with absorption: existence, uniqueness and localization properties*, J. Math. Fluid Mech. **16** (2014), 211–223.
- [2] N. Okazawa, T. Yokota, *Monotonicity method for the complex Ginzburg–Landau equation, including smoothing effect*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 79–88.

*本講演は側島 基宏氏, 横田 智巳氏 (東京理大・理) との共同研究に基づく.