Sobolev 臨界指数を持つ高次元 Kirchhoff 型方程式の 2 つの正値解の存在について

内免大輔 （室蘭工業大学ひと文化系領域）

概要

本講演では以下の非局所的非線形楕円型方程式を考える。

$$\begin{cases} -\left(1+\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)\Delta u = \lambda u^q + u^{2^*-1},\ u>0 \text{ in } \Omega, \\ u=0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$N \geq 3$ とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする。また，$\alpha > 0$，$\lambda > 0$ さらに $2^* = 2N/(N-2)$，$1 \leq q < 2^*-1$ とする。(P) は「伸びる」弦の自由振動を記述する Kirchhoff 波動方程式 [4] の定常問題である。その最大の特徴は主要項が解自身の Dirichlet 積分量に依存する非局所的係数 $(1+\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2dx)$ を持つ点にある。同種の非局所放物型方程式に対する解析においては，この種の非局所性が問題に多重定常解を誘起する効果を持つなどの興味深い結果が報告されている [2]。一方で (P) は非線形項として Sobolev の臨界項 u^{2^*-1} を持つ。一般に Sobolev 臨界項を持つ非線形楕円型方程式は，対応する Sobolev 空間の埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ の compact 性の欠如が起因となり，解析の困難な問題となる。その分興味深い問題としてこれまで盛んな解析が行われてきた [1]。本講演では上述のような非局所性と臨界非線形性が共存する問題 (P) の解の存在について考える。

これまでの研究では $N = 3, 4$ の場合の解の存在について調べられてきた。3 次元においては非局所的係数の影響によって生じる解の多重性が確認された [5]。さらに 4 次元においては Sobolev 臨界性に起因する通常の難しさに加え Ambrosetti-Rabinowitz 条件が欠如していることでより複雑な状況が生じており，興味深い問題として解析が行われている [5]。本講演ではこれらの研究に先駆けて高次元（$N \geq 5$）問題に対する多重解の存在証明を行う。我々の主定理は以下の通りである。

主定理 1 (N.-Shibata,submitted)**.** ある定数 $\alpha_0 > 0$ が存在して任意の $\alpha \in (0, \alpha_0)$，$\lambda \in (0, \lambda_*)$ に対し (P) は少なくとも 2 つの解を持つ。ただし，$\lambda_1 > 0$ を $-\Delta$ の Ω 上での第一固有値として $q = 1$ のとき $\lambda_* = \lambda_1$，$1 < q < 2^* - 1$ のとき $\lambda_* = \infty$ と定める。

ここで，$\alpha = 0$ かつ Ω が球のとき，(P) は解の一意性を持つことに注意する [7]。一方で $\alpha > 0$ とした我々の主定理では多重解の存在が得られている。これは通常の峠型の解に加え，非局所性の効果によってエネルギー最小解が現れた結果である。この主定理の証明のためには，問題の変分的定式化に基づき臨界点理論を適用する。この際，近似臨界点の列である「Palais-Smale 列」の集中 compact 性に関する解析が必要となる。しかし $N \geq 5$ の場合，非局所性の影響によってその集中現象を特徴づける極限方程式の解の一意性が壊れている。このことで，Palais-Smale 列はより複雑な挙動を示す可能性がありその解析は困難である。我々はこの困難を解消するために fibering map 法 [3] を集中 compact 性解析 [8] に導入する。本研究は柴田将敬氏（東工大）との共同研究に基づくものである。

参考文献

[1] H. Brezis and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36, 437–477 (1983).

[2] M. Chipot, V. Valente and G. Vergara Caffarelli, Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110, 199–220 (2003).

[3] P. Drábek and S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127, 703—726 (1997).

[4] G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Teubner, Leipzig, (1876).

[5] D. Naimen, On the Brezis-Nirenberg problem with a Kirchhoff type perturbation, Adv. Nonlinear Stud. 15, 135–156 (2015).

[6] D. Naimen, The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four, J. Differential Equations 257, 1168–1193 (2014).

[7] P.N. Srikanth, Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems, Differential Integral Equations 6 663-670 (1993).

[8] M. Struwe, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, Math. Z. 187, 511–517 (1984).