$|x|^\alpha\Delta$ を主要項にもつ楕円型作用素が生成する解析半群の積分核評価について*

側島　基宏†　（東京理科大学・理工学部）

1. Introduction

本講演では $N \in \mathbb{N}$ とし，以下のような各係数が原点と無限遠方に特異性を持つような 2 階線形楕円型作用素

$$\mathcal{L} = |x|^\alpha\Delta + c|x|^{\alpha-2}x\cdot\nabla - b|x|^{\alpha-2}, \quad x \in \Omega := \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

を考える．ここで，$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$，$c \in \mathbb{R}$，$b \in \mathbb{R}$ とし，$D_c := b + (\frac{N-2+c}{2})^2 \geq 0$ が満たされているとする．$L^p = L^p(\mathbb{R}^N)$ におけるこの作用素の研究は数多くある．$\alpha = c = 0$ の場合は $\mathcal{L}$ は Schrödinger 作用素であり，この場合の作用素論的研究は Okazawa [**8**] によって為されており，minimal realization

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}_{p,\min}) := C_c^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}) \\ \mathcal{L}_{p,\min} := \mathcal{L}u, \end{cases}$$

が縮小的な解析半群を生成するための必要十分条件が得られている．また，このとき minimal realization と maximal realization

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}_{p,\max}) := \{v \in L^p\ ;\ (\mathcal{L}v \text{ in the sense of distributions in } \Omega) \in L^p\} \\ \mathcal{L}_{p,\max} := \mathcal{L}u, \end{cases}$$

が一致することが示されている．$c \neq 0$ の場合についても同様の条件が [**9**] で与えられている．半群理論からのアプローチを試みている先行研究として Liskevich-Sobol-Vogt [**2**], Arendt-Goldstein-Goldstein [**1**] などがあるが，これらは L^2 空間（または重み付き L^2 空間）で生成された半群の L^p 空間での振る舞いについて調べており，生成作用素（楕円型作用素）自体の性質は扱っていない．一方，$\alpha \neq 2$ の場合は，近年 Metafune-Spina [**4, 5**] により $|x|^\alpha\Delta$, Metafune-Spina-Tacelli [**7**] により $|x|^\alpha\Delta + c|x|^{\alpha-2}x\cdot\nabla$ の作用素論的研究がすすめられ，[**3**] により以下のような主張が得られている．

Proposition 1 ([**3**]). $1 < p < \infty$, $\alpha \neq 2$, $c, b \in \mathbb{R}$ は $D_c \geq 0$ を満たすとする．このとき，

$$\frac{N-2+c}{2} - \sqrt{D_c} + \min\{0, 2-\alpha\} < \frac{N}{p} < \frac{N-2+c}{2} + \sqrt{D_c} + \max\{0, 2-\alpha\}$$

ならば，L^p 上の解析半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を生成する $\mathcal{L}$ の realization が存在する．

本講演の目的は，[**3**] (Proposition 1) で得られた解析半群に対し，

$$[T(t)f](x) = \int_{\mathbb{R}^N} k(t,x,y)f(y)\,dy \quad \text{a.a. } x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

なるような積分核 k に対する Gaussian 型の評価を得ることである．

---

*本講演は Giorgio Metafune 氏と Chiara Spina 氏 (サレント大学) との共同研究に基づく．

†e-mail: msobajima1984@gmail.com

2. Result

以下が本講演の主定理である．

Theorem 2 ([**6**]). $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を Proposition 1 で得られた解析半群であるとする．このとき，任意の $t > 0$ に対して (1) を満たす非負値関数 $k(t,\cdot,\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\Omega)$ と定数 $M, m \geq 1$ が存在して

$$\begin{cases} 0 \leq k(t,x,y) \leq Mt^{-\frac{N}{2-\alpha}} \varrho_{s_1, \frac{c-\alpha}{2}+\frac{N\alpha}{4}}\left(\frac{|x|}{t^{\frac{1}{2-\alpha}}}\right) \varrho_{s_1-c+\alpha, -\frac{c-\alpha}{2}+\frac{N\alpha}{4}}\left(\frac{|y|}{t^{\frac{1}{2-\alpha}}}\right) \exp\left[-\frac{d(x,y)^2}{mt}\right] \\ \hfill \text{if } \alpha < 2 \\ 0 \leq k(t,x,y) \leq Mt^{-\frac{N}{2-\alpha}} \varrho_{\frac{c-\alpha}{2}+\frac{N\alpha}{4}, s_2}\left(\frac{|x|}{t^{\frac{1}{2-\alpha}}}\right) \varrho_{-\frac{c-\alpha}{2}+\frac{N\alpha}{4}, s_2-c+\alpha}\left(\frac{|y|}{t^{\frac{1}{2-\alpha}}}\right) \exp\left[-\frac{d(x,y)^2}{mt}\right] \\ \hfill \text{if } \alpha > 2 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$s_1 = \frac{N-2+c}{2} - \sqrt{D_c}$, $s_2 = \frac{N-2+c}{2} + \sqrt{D_c}$,

$$d(x,y) := \left||x|^{-\frac{\alpha}{2}}x - |y|^{-\frac{\alpha}{2}}y\right|, \quad \varrho_{\gamma_1,\gamma_2}(\xi) := \begin{cases} |\xi|^{-\gamma_1} & \text{if } |\xi| \leq 1, \\ |\xi|^{-\gamma_2} & \text{if } |\xi| > 1. \end{cases}$$

これによって，$\mathcal{L}$ の L^p での定義域の特徴づけと $\mathcal{L}$ によって生成される解析半群に対する積分核評価の双方が得られたことになる．

時間があれば，Theorem 2 から得られる $\mathcal{L}_{p,\mathrm{int}}$ のスペクトルや，$C_0(\Omega) := \{f \in C(\mathbb{R}^N) \ \lim\limits_{|x|\to 0} f(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ で $\mathcal{L}$ が生成する半群についても触れたい．

References

[1] W. Arendt, R. Goldstein, J.A. Goldstein, *Outgrowths of Hardy's inequality*, Recent advances in differential equations and mathematical physics, 51-68, Contemp. Math., 412, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[2] V. Liskevich, Z. Sobol, H. Vogt, *On the L^p-theory of C_0-semigroups associated with second-order elliptic operators II*, J. Funct. Anal. **193** (2002), 55–76.

[3] G. Metafune, N. Okazawa, M. Sobajima, C. Spina, *Scale invariant elliptic operators with singular coefficients*, J. Evol. Equ. **16** (2016), 391–439.

[4] G. Metafune, C. Spina, *Elliptic operators with unbounded diffusion coefficients in L^p spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **11** (2012), 303–340.

[5] G. Metafune, C. Spina, *A degenerate elliptic operator with unbounded diffusion coefficients*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **25** (2014), 109–140.

[6] G. Metafune, M. Sobajima, C. Spina, *Kernel estimates for elliptic operators with second-order discontinuous coefficients*, J. Evol. Equ., to appear.

[7] G. Metafune, C. Spina, C. Tacelli, *Elliptic operators with unbounded diffusion and drift coefficients in L^p spaces* Adv. Differential Equations **19** (2014), 473–526.

[8] N. Okazawa, *L^p-theory of Schrödinger operators with strongly singular potentials*, Japan. J. Math. **22** (1996), 199–239.

[9] N. Okazawa, M. Sobajima, L^p-theory for Schrödinger operators perturbed by singular drift terms, New prospects in direct, inverse and control problems for evolution equations, 401–418, Springer INdAM Ser., **10**, Springer, Cham, 2014.