

Remarks on derivative nonlinear Schrödinger systems with multiple masses

砂川 秀明 (大阪大学)

次の形をした非線形シュレディンガー方程式系の、小さな初期値に対する解の長時間漸近挙動について考える:

$$\mathcal{L}_{m_j} u_j = F_j(\mathbf{u}, \partial_x \mathbf{u}), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

ここで $\mathcal{L}_{m_j} = i\partial_t + \frac{1}{2m_j}\partial_x^2$, $i = \sqrt{-1}$, $m_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. また, $\mathbf{u} = (u_j(t, x))_{1 \leq j \leq N}$ は $\mathbb{C}^N$ -値の未知関数であり, F_j は $(\mathbf{u}, \partial_x \mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\partial_x \mathbf{u}})$ についての斉3次多項式であるとする.

$\mathbb{R}^1$ 上のシュレディンガー方程式の長時間挙動を非線形摂動として考える際, 3次の非線形項が臨界的な状況を与えることは良く知られている. 雑に言う, 一般に初期値がどれだけ小さくても解は自由解に漸近せず, 時刻無限大における解の漸近形は非線形項から本質的な影響を受ける. 単独 ($N = 1$) の場合については既に膨大な研究蓄積があるが, 連立系 ($N \geq 2$) で特に質量項 m_j が成分ごとに異なり得る場合についてはまだ十分に解明できておらず, 近年活発に研究されている. 以前の仕事 [1] では, ゲージ変換

$$(u_j)_{1 \leq j \leq N} \mapsto (e^{im_j \theta} u_j)_{1 \leq j \leq N}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

に対して方程式系が不変となるような設定の下で, 解が時間大域的に存在するための非線形項の形状と質量項の組み合わせに関するいくつかの構造条件を提示し, その条件下における解の長時間漸近挙動について詳しく調べた. 例えば

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m u = \kappa \bar{u}^2 \partial_x v, \\ \mathcal{L}_\mu v = \lambda u^2 \partial_x u, \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

($\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$) を例にとると, $\mu = 3m$ のときゲージ不変であり, $\operatorname{Re}(\kappa\lambda) < 0$ かつ $\operatorname{Im}(\kappa\lambda) = 0$ という条件の下で [1] の結果を適用できて解の時間大域存在と L^2 -ノルムの有界性が言える. しかし, $\mu \neq 3m$ の場合には $\mathcal{L}_m$ と可換な作用素 $\mathcal{J}_m = x + \frac{it}{m}\partial_x$ が非線形項に効果的に機能しないために, [1] のアプローチは破綻する. あるいは,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m u = \kappa \partial_x (v^3) \\ \mathcal{L}_\mu v = \lambda \partial_x (u^3) \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

($\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$) という系については, m と μ の比の値に関わらずゲージ不変ではないため, [1] の方法は適用できない. そこで今回はこれら2つの例を主対象として, [1] の方法では扱えなかったケースについて考察してみた. その結果を報告したい.

以下, 初期条件は

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

とし, $\|u_0\|_{H^2 \cap H^{1,1}} + \|v_0\|_{H^2 \cap H^{1,1}}$ は十分小さいとする (H^s は通常の Sobolev 空間, $H^{s,\sigma}$ は重み付き Sobolev 空間).

主結果は以下の通り:

定理 1. $\mu \neq 3m$ かつ $\mu \neq 2m$ を仮定する. このとき, 初期値問題 (1)–(3) は $C([0, \infty); H^2 \cap H^{1,1})$ というクラス内に一意的な時間大域解をもつ. さらに $\hat{u}_+, \hat{v}_+ \in L^\infty(\mathbb{R}_\xi)$ を満たす $u_+, v_+ \in L^2(\mathbb{R}_x)$ が存在して, $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{i\frac{t}{2m}\partial_x^2} u_+ + O(t^{-1/4+\delta}) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_x) \\ v(t) &= e^{i\frac{t}{2\mu}\partial_x^2} v_+ + O(t^{-1/4+\delta}) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_x) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sqrt{\frac{m}{it}} \hat{u}_+ \left(\frac{mx}{t} \right) e^{i\frac{mx^2}{2t}} + O(t^{-3/4+\delta}), \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}_x) \\ v(t, x) &= \sqrt{\frac{\mu}{it}} \hat{v}_+ \left(\frac{\mu x}{t} \right) e^{i\frac{\mu x^2}{2t}} + O(t^{-3/4+\delta}) \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}_x) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\delta > 0$ は任意に小さく取れる定数. また, $\hat{\phi}$ は ϕ の Fourier 変換.

定理 2. $\mu \neq 3m$ かつ $m \neq 3\mu$ を仮定する. このとき, 初期値問題 (2)–(3) に対して定理 1 と同じ結論が成り立つ.

注意 3. 上の定理では κ と λ に対していかなる制約も課していない. これはゲージ不変の場合とは著しく異なる点である. 実際, $\mu = 3m$ かつ $(\kappa, \lambda) = (0, 1)$ の場合には, (u_0, v_0) を適当に選ぶと, (1)–(3) の解について

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\|_{L^2} = \infty$$

となるようにできる (したがって特に, 漸近自由でない).

注意 4. 今回の方法は上記の2例のみに特化したものではなく, より一般的な N -成分の連立系に対して上の結果を拡張できる (但し, 表記がやや煩雑になるのでここには記さない). 詳細については [2] を参照されたい.

最後に, [1] と今回の方法の違いについて簡単に触れておく. 先述の通り, ゲージ不変でない場合には作用素 $\mathcal{J}_m$ を非線形項に直接適用させることができない. この困難を回避するために $\mathcal{P} = x\partial_x + 2t\partial_t$ というベクトル場を用いる. その際, 等式 $\mathcal{J}_m\partial_x = \mathcal{P} + 2it\mathcal{L}_m$ および交換関係 $[\mathcal{L}_m, \mathcal{P}] = 2\mathcal{L}_m$ が鍵となる ($\mathcal{P}$ が m によらないことにも注意). また, 自由発展群 $\exp(\frac{it}{2m}\partial_x^2)$ の分解公式を用いて方程式を変形した際に現れる振動項をうまく制御することで, 解の各点評価を得る. その際, 非線形項に未知関数の微分が含まれていることを本質的に用いる.

ゲージ不変でなく非線形項に未知関数の微分を全く含まないような方程式系に対しては, 今回の方法はおそらく有効でない.

参考文献

- [1] C. Li and H. Sunagawa, Nonlinearity **29** (2016), 1537–1563.
- [2] C. Li and H. Sunagawa, arXiv:1603.04966.