

ウェーブレット展開と その無条件収束性について*

鈴木 俊夫

筑波大学 数理物質科学研究科

E-mail: toshio-s@math.tsukuba.ac.jp

Banach 空間 X 上の級数 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} x_j$ が無条件収束するとは、任意の置換 $\sigma : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ に対して、 $\sum_{j \in \mathbf{Z}} x_{\sigma(j)}$ が収束する、すなわち、級数の収束先が和の順番に寄らない、ということである。 X が Hilbert 空間のときは、正規直交基底 $\{e_j(t)\}$ に対し、Parseval の等式、 $\|\sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j e_j(t)\|_X^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2$ より、無条件収束が保障される。また、この定義から、絶対収束する級数は、無条件収束することがわかる。

$\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底をなすような $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ を (マザー) ウェーブレットと呼ぶ。ウェーブレット解析は 1980 年初めに登場した、時間周波数解析のひとつである。さて、ウェーブレット展開 $f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}$ の $L^2(\mathbf{R})$ 以外での無条件収束性を考える。Fourier 解析の基底は、解析的な関数の空間 $\mathcal{A}$ に属するが、ウェーブレットには滑らかさや減衰度が異なる様々な種類の関数があるため、展開に用いる基底の空間 Y を準備する。以下は、ウェーブレットの無条件収束性に関する諸結果である。

定理 1 (Y. Meyer). $g \in L^1[0, \infty)$ は $|g(0)| < \infty$, $\|tg(\cdot)\|_{L^1[0, \infty)} < \infty$ を満たすとし、 $Y = \{y \in \mathcal{A} ; |y(t)| + |y'(t)| \leq g(|t|)\}$ とおく。このとき、 $\psi \in Y$ ならば、 $f \in L^p(\mathbf{R}) (1 < p < \infty)$ の ψ に関するウェーブレット展開は無条件収束する。 ([?] 参照)

定理 2 (T.Hoshiro). $Y = \{y \in \mathcal{A} ; \mathcal{F}y \text{ は有限個の閉区間の和集合の台を持つ}\}$ とする。このとき、 $\psi \in Y$ ならば、 $f \in L^p(\mathbf{R}) (1 < p < \infty)$ の ψ に関するウェーブレット展開は無条件収束する。 ([2] 参照)

これらの話から、局所性の弱いウェーブレットに関しても、 $L^p(\mathbf{R}) (1 < p < \infty)$ での無条件収束性が保証されることがわかる。今回の研究では、一様ノルム、即ち $L^\infty(\mathbf{R})$ ノルムで、無条件収束性について考えることにより、ウェーブレット展開における次の結果が得られた。

定理 3 (T. Kinoshita, N. Fukuda, S. [1]). 以下の条件を満たす $f_0 \in \{C^0(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})\} \setminus W^{1,1}(\mathbf{R})$ が存在する：

- $\{c_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbf{Z}^2} \in \ell^2$, $\{2^{|j|/2} c_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbf{Z}^2} \notin \ell^1$ を満たす $\{c_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbf{Z}^2}$ が存在して、 f_0 は $\psi \in Lip(\mathbf{R})$ を用いて、 $f_0(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ と $L^2(\mathbf{R})$ でウェーブレット展開される。

*本研究は木下保氏 (筑波大学) と福田尚弘氏 (松江工業高等専門学校) との共同研究に基づく。

- $f_0(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$ は $L^\infty(\mathbf{R})$ で, $f_0(x)$ に無条件収束しない.

この定理の証明は, 具体的な f_0 の構成によって行われる. 構成の際には, 指数減衰度を持つ Lipschitz 連続なウェーブレットとして, Strömberg ウェーブレットをうまく利用した.

参考文献

- [1] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 14 no. 1, 1650007, 18 pp. (2016).
- [2] T. Hoshiro, Unconditional convergence of wavelet expansions (Japanese) (Kyoto, 2004). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, No. 1385, 94–104 (2004).
- [3] J. O. Strömberg, Ondelettes à localisation exponentielles, Proc. Conference in Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund, 475–493 (1983).
- [4] N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bull. Math., **36**, No. 3, 319–341 (2012).
- [5] Y. Meyer, Wavelets and operators. Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **37**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [6] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [7] W. P. A. Ziemer, Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989., Cambridge University Press, 1959.