Airy 方程式に対する Modulation 空間上の Strichartz 型評価¹

東京理科大学 理学研究科 高橋 直

本研究では, 次の Airy 方程式を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ である. $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとき, 各 $t \in \mathbb{R}$ で $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ となる (1) の解は以下で表せる.

$$u(t, x) = (e^{-t\partial_x^3} u_0)(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [e^{it\xi^3} \mathcal{F} u_0(\xi)](x).$$

定義 1.(波束変換)

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x, \xi)$ を

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

で定義する.

定義 2.(Modulation 空間)

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ に対して Modulation 空間 $M_{s, \varphi}^{p, q}(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する.

$$M_{\varphi, s}^{p, q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_{\varphi, s}^{p, q}} := \left\| \|\xi\|^s W_\varphi f(x, \xi) \|_{L_x^p} \right\|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

Modulation 空間 $M^{p, q}(\mathbb{R}^n)$ は窓関数 φ に依らないことが知られている.(1) を波束変換することにより, 次の解の波束変換による表現を得る.

$$W_{\varphi(t)}(e^{-t\partial_x^3} u_0)(x, \xi) = e^{-3it\xi\partial_x^2} [e^{it\xi^3} W_{\varphi_0} u_0(x - 3\xi^2 t, \xi)].$$

ただし, このとき $\varphi(t) = e^{-t\partial_x^3} \varphi$ である. このことを用いて次の結果を得た.

定理 1.

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $2 \leq p, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $2 = r(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ を満たすものとする. このとき, $f(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に対し, 次の不等式が成立する:

$$(2) \quad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{t\partial_x^3} f(t, x) dt \right\|_{L_x^2} \leq C \left\| \|f\|_{M_{\varphi(t), -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}^{p', 2}} \right\|_{L_t^{r'}}.$$

ただし, C は f に依存しない正定数.

定理 2.

$2 \leq p \leq \infty$, $2 = r(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ を満たすとする. このとき, $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し, 次の不等式が成立する:

$$(3) \quad \|e^{-t\partial_x^3} u_0\|_{L^r \left(\mathbb{R}; M_{\varphi(t), \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}^{p, 2} \right)} \leq C \|u_0\|_{L^2}.$$

References

- [1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. Vol. 64, No. 2 (2012), 223-231.
- [2] 高岡秀夫, 非線形分散型波動方程式の大域解析, 数学, 60 (2008), 337-351.

¹本講演は加藤 圭一氏との共同研究に基づく