

Orbital stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation coupled with the Maxwell equations

渡辺 達也 (京都産業大学)*

次のマックスウェル方程式と連立したシュレディンガー方程式を考える.

$$i\psi_t + \Delta\psi = e\phi\psi + e^2|\mathbf{A}|^2\psi + ie\psi \operatorname{div} \mathbf{A} + 2ie\nabla\psi \cdot \mathbf{A} - |\psi|^{p-1}\psi. \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_{tt} - \Delta\mathbf{A} = e \operatorname{Im}(\bar{\psi}\nabla\psi) - e^2|\psi|^2\mathbf{A} - \nabla\phi_t - \nabla\operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (2)$$

$$-\Delta\phi = \frac{e}{2}|\psi|^2 + \operatorname{div} \mathbf{A}_t. \quad (3)$$

ただし, $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbf{A} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $e > 0$, $1 < p < 5$ とする. 本講演では, (1)-(3) の定在波解の安定性を考察する.

方程式 (1)-(3) は シュレディンガー波動関数 ψ と磁場のゲージポテンシャル $(\mathbf{A}, \phi)$ の相互作用を記述しており, e は相互作用の強さを表す. $e = 0$ のとき, (1) は良く知られた非線形シュレディンガー方程式となる. また, 方程式 (1)-(3) は gauge ambiguity を持つため, 本講演では $\mathbf{A}$ に対してクーロン条件 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ を課す. この場合, (1) を次のように表すことが出来る.

$$i\psi_t + L_A\psi - V(x)\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0. \quad (4)$$

ただし V は非局所ポテンシャル $V(x) = \frac{e^2}{2}(-\Delta)^{-1}|\psi|^2$ であり, L_A は次で定義される磁場付きシュレディンガー作用素である: $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ かつ

$$L_A\psi := \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - ieA_j(x) \right)^2 \psi = \Delta\psi - 2ie\nabla\psi \cdot \mathbf{A} - e^2|\mathbf{A}|^2\psi.$$

方程式 (4) において $V \equiv 0$ かつ磁場 $\mathbf{A}$ が given の場合には, [2] によって定在波解の安定性が考察されている.

本講演では $\omega > 0$ に対して, 次の形をした (1)-(3) の定在波解を考える.

$$\psi(x, t) = \exp(i\omega t)u(x), \quad \mathbf{A}(x, t) = \mathbf{0} \text{ and } \phi(x, t) = \phi(x).$$

このとき $S(u) := \frac{1}{2}(-\Delta)^{-1}|u|^2$ とすると, 次の (非局所的) 定常問題が得られる.

$$-\Delta u + \omega u + e^2 S(u)u = |u|^{p-1}u. \quad (5)$$

さらに $\mu > 0$ に対して, 次の最小化問題を考える.

$$c_e(\mu) := \inf_{u \in B(\mu)} J_e(u). \quad (6)$$

ただし $B(\mu) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \mu\}$ とし, 汎関数 J_e を次で定める.

$$J_e(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{e^2}{4} \int_{\mathbb{R}^3} S(u)|u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

本研究内容は Mathieu Colin 氏 (Université de Bordeaux) との共同研究に基づく.

* e-mail: tatsuw@cc.kyoto-su.ac.jp

最小化問題 (6) を考える場合には, (5) における ω はラングランジュ乗数として現れることに注意する. (6) の最小点の存在および, シュレディンガー・ポワソン方程式:

$$i\psi_t + \Delta\psi - e^2 S(\psi)\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0$$

に対する定在波解の安定性に関する結果は [1], [4], [5] 等で得られている.

主結果は以下の通りである.

定理 1 (Existence of minimizers) $\mu > 0$, $1 < p < \frac{7}{3}$ とする.

- (i) $2 \leq p < \frac{7}{3}$ のとき, ある $e^* = e^*(\mu, p) > 0$ が存在し, $e < e^*$ ならば (6) は最小点 $u_{e,\mu}$ をもつ. 一方で $e > e^*$ ならば, (6) は最小点をもたない. さらに任意の $\mu > 0$ に対して, $e^*(\mu, 2) = e^*(2) \leq \frac{2}{3}$ が成り立つ.
- (ii) $1 < p < 2$ ならば, ある $\tilde{e} = \tilde{e}(\mu, p) > 0$ が存在して, $e < \tilde{e}$ に対して (6) は最小点 $u_{e,\mu}$ をもつ.

定理 2 (Existence of ground states and asymptotic uniqueness)

$\omega > 0$ を given とし, $2 \leq p < 5$ かつ $p = 2$ ならば $e < e^*$ とする.

- (i) (5) の基底状態解 $u_{e,\omega}$ が存在する. さらに $p = 2$ ならば, ある $\mu(\omega) > 0$ が一意に存在して, u が (5) の基底状態解であることと, u が $c_e(\mu(\omega))$ に対応する (6) の最小点であることは同値である.
- (ii) ある $e_0 = e_0(\omega) > 0$ が存在して, $e < e_0$ に対して (5) の基底状態解は一意である. さらに $p = 2$ ならば, e_0 は ω によらない.
- (iii) $p = 2$ ならば, 任意の $\mu > 0$ と $e < e_0$ に対して (6) の最小点 $u_{e,\mu}$ は一意.

定理 3 (Stability of standing waves) $\omega > 0$ を given とし, $p = 2$, $e < e_0$ かつ $u_{e,\omega}$ を (5) の一意な基底状態解とする. このとき, (1)-(3) の定在波解

$$(\psi_{e,\omega}, \mathbf{A}_{e,\omega}, \phi_{e,\omega}) := \left(\exp(i\omega t)u_{e,\omega}, \mathbf{0}, \frac{e}{2}(-\Delta)^{-1}|u_{e,\omega}|^2 \right)$$

は安定である. $1 < p < \frac{7}{3}$, $p \neq 2$ かつ $e < \min\{e^*, \tilde{e}\}$ ならば, (6) の最小点の集合の安定性も成り立つ. ここでの安定性の定義は, 講演中に述べる.

定理 3 は [3] による変分法を用いた安定性解析から従う. そこでカギとなるのが, 定理 2 (iii) による最小点の一意性である. 本講演では定理 2 と 3 を中心にして, 通常の非線形シュレディンガー方程式の場合との違いや, 対応する定常問題が非局所的であることによる難しさをどう克服するか等を紹介する.

参考文献

- [1] J. Bellazzini, G. Siciliano, Z. Angew. Math. Phys. **62** (2011), 267–280.
- [2] T. Cazenave, M. J. Esteban, Mat. Aplic. Comp. **7** (1988), 155–168.
- [3] T. Cazenave, P. L. Lions, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.
- [4] H. Kikuchi, Adv. Nonlinear Stud. **7** (2007), 403–437.
- [5] Ó. Sánchez, J. Soler, J. Statist. Phys. **114** (2004), 179–204.