圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時空間周期解の安定性について [1]

榎本 翔太 （えのもと しょうた）

明治大学 研究・知財戦略機構

e-mail: s_enomoto@meiji.ac.jp

無限層状領域 Ω における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\
\rho(\partial_t v + (v\cdot\nabla)v) - \nu\Delta v - (\nu+\nu')\nabla \mathrm{div} v + \nabla P(\rho) = \rho g, \\
v|_{x_n=0,l} = 0 \qquad\qquad (t>0, x'\in\mathbb{R}^{n-1}), \\
(\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0)
\end{cases}
\tag{1}
$$

を考える．ここで $n=2,3$ であり, $\rho=\rho(x,t)$, $v={}^\top(v^1(x,t),\cdots,v^n(x,t))$, $(t\geq 0, x\in\Omega)$ はそれぞれ密度と速度場を表す無次元化された未知関数である．また, 無限層状領域 Ω は

$$
\Omega = \{x=(x',x_n); x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}, 0<x_n<l\}
$$

で与えられる．l は与えられた定数である．$g=g(x,t)$ は外力を表す与えられた関数で

$$
g(x'+\frac{2\pi}{\alpha_i}\mathbf{e}_i, x_n, t) = g(x',x_n,t), \qquad\qquad g(x',x_n,t+T) = g(x',x_n,t) \tag{2}
$$

を満たす．ここで α_1, $\cdots$, α_{n-1} は正定数である．ν, ν' は

$$
\nu>0, \qquad \frac{2}{n}\nu+\nu'\geq 0
$$

を満たす定数である．$P=P(\rho)$ は圧力を表し, ρ の滑らかな関数で,

$$
\gamma \equiv \sqrt{P'(1)} > 0
$$

を満たすと仮定する．

無限層状領域 Ω における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の安定性の研究については,Kagei([3]) や S.E.([2]), Brezina（[1]）の結果がある．[2], [3] では定常解について解析が行われており, 特に [2] では空間周期パターンを持つ定常解の安定性解析が行われている．時間周期解に関しては Brezina（[1]）によって平行流型時間周期解のまわりの解の漸近挙動解析が行われている．ここで平行流とは Poiseuille 流や Couette 流のような非有界な軸方向に対して一様な流れであり, [1] では外力や境界に時間周期性を課し, 速度場に関して時間周期性を持つ平行流について考察した．特に解析の中ではその一様性と密度が時間に依存しない構造が本質的に用いられている．

本講演では外力 g に対して時空間周期性 (2) を仮定することによって, [1] で考察された平行流型時間周期解のような性質を持たない解を得ることができる．
実際, 次の時空間周期解が得られる．

命題 0.1. *$\exists\ \nu_0>0$, $\tilde{\gamma}_0>0$ such that if $\nu\geq\nu_0$, $\frac{\gamma^2}{\nu+\tilde{\nu}}\geq\tilde{\gamma}_0$, then $\exists!$ space-time periodic solution $u_p(x,t)={}^\top(\rho_p(x,t),v_p(x,t))$ satisfying $u_p(x'+\frac{2\pi}{\alpha_i}\mathbf{e}_i,x_n,t)=u_p(x',x_n,t)$, $u_p(x',x_n,t+T)=u_p(x',x_n,t)$,*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2j+k\leq 4}\|\partial_t^j\phi_p(t)\|^2_{H^k(\Omega_{per})} + \sum_{2j+k\leq 4}\|\partial_t^j v_p(t)\|^2_{H^k(\Omega_{per})} \\
&\qquad + \sum_{2j+k\leq 4}\int_0^t \|\partial_t^j\phi_p(s)\|^2_{H^k(\Omega_{per})} + \|\partial_t^j v_p(s)\|^2_{H^{k+1}(\Omega_{per})}ds \leq C\sum_{2j+k\leq 3}\int_0^T \|\partial_t^j g(t)\|_{H^k(\Omega_{per})}dt.
\end{aligned}
$$

[1]本講演は隠居良行氏 (九州大学) 及び Mohamad Nor Azlan 氏との共同研究に基づく．

本講演では時空間周期解 u_p の安定性を考えたい.

周期解 u_p に対する撹乱を $u(t) = {}^\top(\phi(t), w(t)) = {}^\top(\gamma^2(\rho(t)-\rho_s), v(t)-v_s)$ と表すと (1) は次のように書き換えられる.

$$\begin{cases} \partial_t\phi + \mathrm{div}(\phi v_p) + \gamma^2\mathrm{div}(\rho_p w) = f^0, \\ \partial_t w - \frac{\nu}{\rho_p}\Delta w - \frac{\tilde{\nu}}{\rho_p}\nabla\mathrm{div}w + \nabla\left(\frac{P'(\rho_p)}{\gamma^2\rho_p}\phi\right) \\ \qquad + \frac{1}{\gamma^2\rho_p^2}(\nu\Delta v_p + \tilde{\nu}\nabla\mathrm{div}v_p)\phi + v_p\cdot\nabla w + w\cdot\nabla v_p = \tilde{f}, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 = {}^\top(\phi_0, w_0). \end{cases} \tag{3}$$

ここで, $\tilde{\nu} = \nu + \nu'$, f^0, $\tilde{f}$ は非線形項である.

(3) の解の時間無限大における漸近挙動について次のことが分かる.

定理 0.2. *$\exists\ \nu_0 > 0$, $\tilde{\gamma}_0 > 0$ such that if $\nu \geq \nu_0$, $\frac{\gamma^2}{\nu+\tilde{\nu}} \geq \tilde{\gamma}_0$, then the following assertion holds: for $u_0 = {}^\top(\phi_0, w_0) \in H^2\cap L^1$ satisfying $\|u_0\|_{H^2\cap L^1} \ll 1$ and $w_0 \in H_0^1$, $\exists 1$ global sol. $u(t) = {}^\top(\phi(t), w(t)) \in \cap_{j=0}^1 C^j([0,\infty); H^{2-2j})$ of (3) satisfying*

$$\|\partial_{x'}^l u(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{n-1}{4}-\frac{l}{2}}) \qquad (t\to\infty)$$

for $l = 0, 1$. Furthermore,

(i) if $n = 3$, then

$$\|u(t) - (\sigma u^{(0)})(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}}\log(1+t)) \qquad (t\to\infty).$$

Here $u^{(0)} = {}^\top(\phi^{(0)}(x', x_n, t), w^{(0)}(x', x_n, t))$ is some space-time periodic function w.r.t x' and t; $\sigma = \sigma(x', t)$: sol. of

$$\begin{cases} \partial_t\sigma - \sum_{j,k=1}^2 a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}\sigma + \sum_{j=1}^2 b_j\partial_{x_j}\sigma = 0, \\ \sigma|_{t=0} = \int_0^l \phi_0(x', x_n)dx_n, \end{cases}$$

where $(a_{jk})_{j,k=1,2}$ is a positive definite matrix; a_{jk}, b: constants.

(ii) If $n = 2$, then

$$\|u(t) - (\sigma u^{(0)})(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{3}{4}+\varepsilon}) \qquad \varepsilon > 0, \qquad (t\to\infty).$$

Here $u^{(0)} = {}^\top(\phi^{(0)}(x_1, x_2, t), w^{(0)}(x_1, x_2, t))$ is some space-time periodic function w.r.t x_1 and t; $\sigma = \sigma(x_1, t)$: sol. of

$$\begin{cases} \partial_t\sigma - a\partial_{x_1}^2\sigma + b\partial_{x_1}\sigma + c\partial_{x_1}(\sigma^2) = 0, \\ \sigma|_{t=0} = \int_0^l \phi_0(x_1, x_2)dx_2, \end{cases}$$

where $a > 0$, b, c: constants.

参考文献

[1] Březina, J., Asymptotic behavior of solutions to the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow, *SIAM J.Math. Anal.*,**45**, Issue 6 (2013), pp. 3514-3574.

[2] Enomoto, S., Large time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equations around periodic steady states, *Nonlinear Anal.*, **152** (2017), pp. 61-87.

[3] Kagei, Y., Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, Arch. Rational Mech. Anal., **205** (2012), pp. 585-650.

[4] Valli, A., Periodic and stationary solutions for the compressible Navier-Stokes equations via a stability method , *Annali della Scuola Normale Superiore di pisa, Classe di Scienze* (1983), pp. 607-647.