

時間依存する消散項を持つ非線形波動方程式の解の 最大存在時間について

成亥隆恭（東京理科大学 学振 PD）

1 導入

本講演は池田正弘氏（理化学研究所）との共同研究に基づく．本講演では以下の時間依存する消散項を持つ非線形波動方程式について考察する．

$$(NLDW) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + (t+1)^{-\beta} \partial_t u = |u|^p, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = \varepsilon u_0, \partial_t u(0) = \varepsilon u_1, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

但し, $\beta \in [-1, 1)$, $p > 1$ とし, $\varepsilon > 0$ は小さなパラメータとする．また u_0 と u_1 は $\mathbb{R}^n$ 上で与えられた関数とし, $u(t, x)$ は実数値未知関数とする．

この方程式 (NLDW) は, 非線形熱方程式 $v_t + \Delta v = v^p$, $v \geq 0$ と同様に藤田指数 $p = p_F := 1 + 2/n$ を境として解の挙動が変わることが知られている．すなわち $1 < p < p_F$ ならば SDBU が成立し, $p > p_F$ ならば SDGE が成立する [5]．ここで, SDGE 及び SDBU とは以下の通りである．

(SDGE) 任意の初期値 (u_0, u_1) に対して, 在る $\varepsilon_* > 0$ が存在し, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ ならば解は大域解となる (Small Data Global Existence)．

(SDBU) 在る初期値 (u_0, u_1) と $\varepsilon_* > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ に対して解が爆発する (Small Data Blow-Up)．

本講演では, SDBU が起こる場合の解の最大存在時間 $T(\varepsilon)$ に関して考える．

2 先行研究

以下の表のように解の最大存在時間 $T(\varepsilon)$ の評価が知られている．

$\beta \backslash p$	$1 < p < p_F$	$p = p_F$
$\beta = -1$	$T(\varepsilon) \approx \exp\left(C\varepsilon^{-\frac{1}{p-1-\frac{n}{2}}}\right), [1]$	$\exp(\exp(C\varepsilon^{-(p-1)})) \leq T(\varepsilon), [1]$
$-1 < \beta < 1$	$T(\varepsilon) \approx C\varepsilon^{-\frac{1}{(\frac{1}{p-1}-\frac{n}{2})(1+\beta)}}, [3, 1]$	$\exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) \leq T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-p}), [2, 1]$ $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-(p-1)})$ if $\beta = 0$, [4]

表 1 最大存在時間 $T(\varepsilon)$ の評価 (ε は十分小さなパラメータ)

ここで $A \approx B(C)$ とは、在る $C_0, C_1 > 0$ が存在して $B(C_0) \leq A \leq B(C_1)$ となることをいう。 $1 < p < p_F$ かつ $\beta \in [-1, 1)$ の場合は、解の最大存在時間 $T(\varepsilon)$ の上から及び下からの評価について最良の結果が得られている。 $p = p_F$ かつ $\beta \in (-1, 1)$ の場合は下からの評価が $\exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) \leq T(\varepsilon)$ である一方、上からの評価が $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-p})$ となっており、最良の評価が得られていなかった。最近、Lai-Zhou [4] によつて $p = p_F$ かつ $\beta = 0$ の場合には最大存在時間 $T(\varepsilon)$ が上からも $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-(p-1)})$ という最良の形で評価されることが示された。しかしながら、一般の $\beta \in (-1, 1)$ の場合には最大存在時間の最良の評価は得られていなかった。また $p = p_F$ かつ $\beta = -1$ の場合には、小さな解がどのように振る舞うか、すなわち SDGE と SDBU のどちらが成立するかすら知られていなかった。

3 主結果

本講演では以下の、 $p = p_F$ における解の最大存在時間の評価について紹介する。

Theorem 3.1. $p = p_F, \beta \in [-1, 1)$ とする。初期値 (u_0, u_1) が $(H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$ に属し、以下の不等式を満たすものとする。

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) + \left(\int_0^\infty e^{-\int_0^\tau (s+1)^{-\beta} ds} d\tau \right) u_1(x) dx > 0.$$

このとき、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、解の最大存在時間 $T(\varepsilon)$ は以下の不等式を満たす。

$$T(\varepsilon) \leq \begin{cases} \exp(\exp(C\varepsilon^{-(p-1)})) & (\beta = -1), \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & (\beta \in (-1, 1)). \end{cases}$$

但し、 C は ε に依らない正の定数である。

これにより $\beta = -1$ の場合には SDBU が成立することがわかる。更にこの定理は、 $p = p_F$ 及び $\beta \in [-1, 1)$ における、解の最大存在時間 $T(\varepsilon)$ に対する上からの最良の評価を与えている。

証明には、 $\beta = 0$ の場合の Lai-Zhou [4] のアイデアを用いる。しかしながら、消散項が時間依存するために彼らの手法をそのまま適用することはできない。特に $\beta = -1$ の場合には最大存在時間 $T(\varepsilon)$ の評価に double-exponential が現れるように証明を工夫する必要がある。

参考文献

- [1] K. Fujiwara, M. Ikeda, Y. Wakasugi, to appear in Funkcialaj Ekvacioj, arXiv:1609.01035.
- [2] M. Ikeda, T. Ogawa, J. Differential Equations **261** (2016), no. 3, 1880–1903.
- [3] M. Ikeda, Y. Wakasugi, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 1, 163–171.
- [4] N-A. Lai, Y. Zhou, preprint, arXiv:1702.07073.
- [5] J. Lin, K. Nishihara, J. Zhai, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32** (2012), no. 12, 4307–4320.