# 進行波の最小速度のYoung測度による解析

伊藤　涼（東京大学）

本講演では，次の KPP 型の非線形項を持つ反応拡散方程式を考える．

$$u_t = u_{xx} + r(x)(1-u)u \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{1}$$

ここで $r(x) \not\equiv 0$ は周期 $L > 0$ の非負値周期関数である．この方程式は外来生物の侵入モデルに現れる．$t$ は時刻，$x$ は位置，$u$ は外来生物の個体数密度，$r$ が外来生物の内的自然増加率（intrinsic growth rate），すなわちこの場合は個体数密度が非常に小さい場合の増加率を表している．

この方程式は，波面の形状を周期的に変化させながら進む進行波と呼ばれるタイプの解を持つこと，またそれらの進行波の平均の速度のうちで最小のもの（以下，これを「最小速度」と呼んで $c^*(r) > 0$ で表す）が存在することが知られている（Weinberger [7], Berestycki-Hamel [1]）．

さらに，この方程式において，コンパクトな台を持つ非負の初期値から出発した解の波面の広がり速度（spreading speed）が進行波の最小速度 $c^*(r)$ に一致することがわかっている（Weiberger [7]，Berestycki et al [2]）．生態学モデルの観点からは，波面の広がり速度は外来生物の侵入速度を表す．この事実から，最小速度を解析することは応用上の観点から重要であることがわかる．

以下で説明するように本講演では，係数 $r$ を特定の制約条件の下でいろいろ変えて，$c^*(r)$ を最小化あるいは最大化する変分問題を考える．

最小速度 $c^*$ に関する変分問題は Shigesada らの論文 [6] においても部分的に論じられているが，厳密な数学的な研究としては，2010 年に Liang-Lin-Matano [4] が積分平均が一定という制約条件の下で最小速度を最大化する変分問題を考察し，最大化係数 $r(x)$ は周期的に配置された $\delta$ 関数（すなわち点測度）であり，関数のクラスには最大化問題の解が存在しないことを示した．これは,「集中化現象」が起こることを意味している．また，Nadin [5] は 2010 年に与えられた関数 $r$ と等位集合の測度が等しい関数の中で最小速度を最大化する関数は $r$ のシュワルツ再配列関数（Schwarz rearrangement）であることを示した．再配列関数とは，関数を等位集合の測度を変えずに，中心を軸に対称でそこから単調に減少する関数に変換した関数のことをいう．その他にも，ごく最近，Matano, Mori, Xiao が係数 $r$ の 2 乗の積分平均が一定という制約条件の下で，最小速度を最大化する変分問題を解析し，最大化関数の存在を示すと共に，Euler-Lagrange 方程式を導出している．

本講演では，これまでの研究を更に一般化して，内的自然増加率 $r$ が，何らかの環境パラメータ $b$ の関数として $h(b)$ という形で表される状況を考察する．ここで $b$ は空間変数 $x$ の周期関数であるとする．つまり，係数 $r(x)$ は，次の関係式によって $\mathbb{R}$ 上の周期関数となる．

$$r(x) = h(b(x)) \tag{2}$$

ここで，$h$ は非負値連続関数である．従来の研究では，主として $h(b) = b$ の場合が扱われていた．しかし，自然科学に現れる現象のなかには，内的自然増加率が環境パラメータに

単純に比例しない場合が数多くある．例えば，Chen-Mertiri-Holland-Basu [3] の実験で，藻の内的自然増加率は光の量に線形に依存しないことが示されている．

本講演では，$c^*(h(b))$ を周期関数 $b(x)$ を変数として，次の 2 つの制約条件の下で最大化，或いは最小化することを Young 測度の理論の視点から考察する．

(C1) $0 \le b(x) \le M$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$.

(C2) $b(x) \ge 0$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$.

ここで $M > \alpha > 0$ はそれぞれ与えられた定数である．制約条件 (C2) は，環境パラメータ $b(x)$（例えば光の量など）の平均値が，あらかじめ与えられた値 $\alpha$ に等しいことを意味している．また，(C1) は，更に $b(x)$ の最大値を上から押える条件を加えている．

本講演では，この問題について最近得られた幾つかの結果を紹介する．特に重要なのは次の定理である．

**定理 1** 制約条件 (C1) の下で，最小化問題

$$\underset{b}{\mathrm{Minimize}}\ c^*(h(b))$$

の解が関数のクラスに存在するための必要十分条件は

$$h(b_-^M) = h(b_+^M)$$

であり，下限の値は $2\sqrt{\mathrm{conv}.h_M(\alpha)}$ となる．特に，$h$ が凸関数の場合は最小化関数が存在し，最小値は $2\sqrt{h(\alpha)}$ となる．さらに，*Young* 測度 $\nu = \{\nu_x\}_{x\in(0,L)}$, $\nu_x = x_\alpha \delta_{b_-^M} + (1-x_\alpha)\delta_{b_+^M}$ はいつでも上記の最小化問題の *Young* 測度の意味の解となる.（つまり，$b_-^M$ と $b_+^M$ の間を微細に振動するような関数列が最小化列になる.）

ここで，$h_M$ は $h$ の $[0,M]$ 上への制限，$\mathrm{conv}.h_M$ は $h_M$ の凸包，$b_-^M, b_+^M$ はそれぞれ $h(b) = \mathrm{conv}.h_M(b)$ となる $b$ の内 $\alpha$ を越えない最大の実数と，$\alpha$ を下回らない最小の実数である．上記の定理の証明は，Young 測度を用いて変分問題の定義域を拡張する Young 測度の一般論によってなされている．

# 参考文献


[1] H. Berestycki and F. Hamel, *Front propagation in periodic excitable media*, Communications on Pure and Applied Mathematics, LV, 949-1032, 2002.

[2] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems. I-Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc., 7: 173-213, 2005.

[3] M. Chen, T. Mertiri, T. Holland and A. S. Basu, *Optical microplates for high-throughput screening of photosynthesis in lipidproducing algae*, J. RSC, 12: 3870-3874, 2012.

[4] X. Liang, X. Lin and H. Matano, *A variational problem associated with the minimal speed of travelling wave for spatially periodic reaction-diffusion equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 362: 5605-5633, 2010.

[5] N. Nadin, *The effect of the Schwarz rearrangement on the periodic principal eigenvalue of a nonsymmetric operator*, SIAM J. Math. Anal., 41:2388-2406, 2010.

[6] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theor. Population Biol., 30: 143-160, 1986.

[7] H. F. Weinberger, *On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat*, J. Math. Biol. 45: 511-548, 2002.