Airy 型方程式の解の波面集合について

神長 雄世　（東京理科大学大学院理学研究専攻科）

本研究では, 次の Airy 型方程式の初期値問題を考える.

$$
\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}
$$

ここで, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ であり, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ とする. このとき (1) の解は以下で与えられる.

$$
u(t,x) = (e^{-t\partial_x^3} u_0)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}[e^{it\xi^3} \mathcal{F} u_0(\xi)](x).
$$

ここで, $\mathcal{F}[f](\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$, $\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}[f](x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi$ である.

定義 1（波束変換）

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, 窓関数 φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を以下で定義する.

$$
W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.
$$

定義 2（波面集合）

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, 波面集合 $WF(f) \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を以下で定義する.

$(x_0, \xi_0) \notin WF(f) :\Longleftrightarrow \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ $\chi(x_0) \neq 0$ を満たす χ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_N > 0$ があって, 次を満たす.

$$
|\mathcal{F}[\chi f](\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \Gamma.
$$

ここで, ξ_0 の錐近傍 Γ とは, ξ_0 の近傍 Γ で, $\xi \in \Gamma, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda\xi \in \Gamma$ を満たすものをいう.

[1] では波面集合の波束変換による特徴づけが考察されている. これを参考に, (1) の解 u の波面集合に対する以下の結果を得た. $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ とし, $\varphi_{0,\lambda}(x) = \lambda^{1/4} \varphi_0(\lambda^{1/2} x)$ とおき, $\varphi_\lambda(t) = e^{-t\partial_x^3} \varphi_{0,\lambda}$ とおく.

定理

初期値問題 (1) の解 u に対して以下の (i), (ii) は同値.

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t,\cdot))$

(ii) x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ に対して, $C_{N,a} > 0$ があって,
任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ なる $\xi \in \Gamma$ に対して以下が成立する.

$$
|e^{-3i\lambda\xi t\partial_x^2} W_{\varphi_\lambda(-t)} u_0(x + 3t\lambda^2\xi^2, \lambda\xi)| \leq C_{N,a} \lambda^{-N}. \tag{2}
$$

注意

式 (2) の表現は, 窓関数 φ_λ を, $\varphi_\lambda(t,\xi) = e^{(-i\partial_x^3 - 3i\xi\partial_x^2)t} \varphi_{0,\lambda}$ ととることで, 以下のように書くことができる.

$$
|W_{\varphi_\lambda(-t,\xi)} u_0(x + 3t\lambda^2\xi^2, \lambda\xi)| \leq C_{N,a} \lambda^{-N}.
$$

References

[1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, "Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator", SUT Journal of Mathematics Vol. 47, No.2(2011), 175-183.

[2] K. Kato and S. Ito, "Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potencial", SUT Journal of Mathematics Vol. 50, No.2(2014), 383-398.