Applications of the Hille–Yosida theorem to the linearized equations of coupled sound and heat flow*

松原 礼佳　(東京理科大学大学院理学研究科)

次の初期値境界値問題 (P) について考える (物理的背景については [2], [3] を参照):

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} w_{tt} = c^2\Delta w - c^2\Delta e + m^2 w, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ e_t = \sigma\Delta e - (\gamma - 1)w_t, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ e = w = 0, & x \in \Gamma,\ t \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = v_0(x),\ e(x,0) = e_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}
$$

ここで, $c > 0$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\gamma > 1$, Ω はなめらかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ の開集合とし, $w = w(x,t)$, $e = e(x,t)$ は未知関数, $w_0 = w_0(x)$, $v_0 = v_0(x)$, $e_0 = e_0(x)$ は既知の初期関数とする.

先行研究として, $\underline{m = 0 \text{ の場合}}$ に Carasso [1] による (P) の解の存在と一意性についての研究がある. [1] では, ある**離散化**したモデルの解 (近似解) に対して, 最小二乗法を適用して近似解の収束が示されているが, 近似解の極限関数の属する関数空間と (P) の解の定義が与えられていない.

本研究では, $\underline{m \neq 0 \text{ の場合}}$ も含めて (P) を扱う. まず, (P) の解を以下のように定義する.

定義. 次の条件を満たす関数 $t \mapsto w(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$, $t \mapsto e(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ の組 (w,e) を (P) の**解**という:

(i) $w \in C^2([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

(ii) $e \in C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

(iii) (w,e) は (P) の方程式と初期条件を $L^2(\Omega)$ で満たす (境界条件は (i), (ii) に組み込まれている).

次に, $v := w_t$ とおき, (w,v,e) を未知関数として, (P) の第 1 式, 第 2 式を $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ における 1 つの方程式とみなして, **Hille–Yosida の定理**を適用することにより, (P) の解の存在と一意性を示した (定理 1). 更に, (P) の**解の正則性**に関する結果も得た (定理 2).

定理 1

任意の $w_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $e_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して, (P) の解 (w,e) が一意的に存在する.

定理 2

初期関数 w_0, v_0, e_0 が

$$
w_0 \in H^k(\Omega),\ v_0 \in H^k(\Omega),\ e_0 \in H^k(\Omega) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}
$$

と両立性関係

$$
\Delta^j w_0 = 0,\ \Delta^j v_0 = 0,\ \Delta^j e_0 = 0 \quad \text{on } \Gamma \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}
$$

を満たすとき (P) の解 (w,e) は次を満たす:

$$
(w,e) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \times C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty)).
$$

参考文献

[1] A. Carasso, *Coupled sound and heat flow and the method of least squares*, Math. Comp. **29** (1975), 447–463.

[2] F. Harlow, A. Amsden, “Fluid Dynamics”, 1971.

[3] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, “Difference Methods for Initial-Value Problems”, 1957.

*本講演は横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.