

Asymptotic behavior of global solutions of an SIR epidemic model with anomalous diffusion *

宮重 貴洋 (東京理科大学大学院理学研究科)

感染症の流行を表す次の拡散付き SIR モデルの初期値境界値問題 (SIR) を考える:

$$(SIR) \quad \begin{cases} S_t = -d_1(-\Delta)^\alpha S - \lambda SI & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ I_t = -d_2(-\Delta)^\alpha I + \lambda SI - \mu I & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ R_t = -d_3(-\Delta)^\alpha R + \mu I & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial S}{\partial n} = \frac{\partial I}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ S(x, 0) = S_0(x), I(x, 0) = I_0(x), R(x, 0) = R_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N})$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, 初期値 S_0, I_0, R_0 は有界な非負値関数, $d_1, d_2, d_3, \lambda, \mu$ は正の定数, $\alpha \in (0, 1)$ とする.

(SIR) で特に $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ のときが古典的 SIR モデルといわれており, 定数解への収束に関して結果が得られているが, その収束レートは知られていない. また, Hnaïen–Kellil–Lassoued [1] では, (SIR) から R を除いた SI モデルにおいて, 古典解の一意的存在, 非負値性, 有界性, 定数解への収束, 指数安定性 (その収束レートが指数関数的であること) が得られている.

本研究では, [1] では考察されていない SIR モデルで, 古典解の一意的存在, 非負値性, 有界性, 定数解への収束, 指数安定性を得た.

定理 1

$(S_0, I_0, R_0) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ で $S_0, I_0, R_0 \geq 0$ とする. このとき, (SIR) の古典解が一意的に存在し, 次を満たす:

- (i) $S, I, R \geq 0$ in $\Omega \times [0, +\infty)$,
- (ii) $(S, I, R) \in C([0, +\infty); C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})) \cap L^\infty(0, +\infty; C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}))$,
- (iii) $S(t) \rightarrow S_\infty, I(t) \rightarrow 0, R(t) \rightarrow \frac{1}{|\Omega|}M - S_\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) in $L^\infty(\Omega)$.

ここで, $S_\infty \geq 0$ はある定数で, $M := \int_\Omega (S_0 + I_0 + R_0)$ である.

定理 2

(S, I, R) を (SIR) の解とし, $h(S_\infty) := \mu - \lambda S_\infty > 0$ とする. このとき, 次の指数安定性が成立する:

- (i) $\|S(t) - S_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} Ce^{-\zeta t} & (h(S_\infty) \neq d_1\theta\lambda_1^\alpha), \\ Cte^{-\zeta' t} & (h(S_\infty) = d_1\theta\lambda_1^\alpha), \end{cases}$
- (ii) $\|I(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{-h(S_\infty)t}$,
- (iii) $\left\|R(t) - \left(\frac{1}{|\Omega|}M - S_\infty\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} Ce^{-\zeta' t} & (h(S_\infty) \neq d_3\theta\lambda_1^\alpha), \\ Cte^{-\zeta' t} & (h(S_\infty) = d_3\theta\lambda_1^\alpha). \end{cases}$

ここで, $\zeta := \min\{h(S_\infty), d_1\theta\lambda_1^\alpha\}$, $\zeta' := \min\{h(S_\infty), d_3\theta\lambda_1^\alpha\}$, λ_1 は Neumann 境界条件下での $(-\Delta)^\alpha$ の固有値で, $C > 0$ と $\theta \in [0, 1]$ はある定数である.

参考文献

- [1] D. Hnaïen, F. Kellil, R. Lassoued, *Asymptotic behavior of global solutions of an anomalous diffusion system*, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), 1519–1530.

*本講演は横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.