

Boundedness in Keller–Segel systems with signal-dependent sensitivity*

水上 雅昭 (東京理科大学大学院理学研究科)

次の感応性関数 $\chi(v)$ をもつ Keller–Segel 系の初期値境界値問題について考える:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v + u - v, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり, 感応性関数 $\chi = \chi(v)$ は次を満たすものとする:

$$(A1) \quad \begin{cases} \chi \in C^{1+\theta}([0, \infty)) \ (\exists \theta > 0), \quad \chi > 0, \\ \exists K > 0 \ \exists a \geq 0 \ \exists k \geq 1; \chi(v) \leq \frac{K}{(a+v)^k}. \end{cases}$$

また, 初期値 u_0, v_0 は次を満たすと仮定する:

$$(A2) \quad 0 \leq u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}, \quad \begin{cases} 0 < v_0 \in W^{1,q}(\Omega) \ (\exists q > n) & (a = 0), \\ 0 \leq v_0 \in W^{1,q}(\Omega) \setminus \{0\} \ (\exists q > n) & (a > 0). \end{cases}$$

問題 (1) は化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる生物 (密度 u) についてのモデルであり, 感応性関数 $\chi(v)$ を導入することで化学物質の濃度の高いところでは走化性が抑制されるという現象を記述している. 感応性関数の例として,

$$\chi(v) = \frac{K}{v}, \quad \chi(v) = \frac{K}{(a+v)^k} \ (k > 1)$$

などがあげられる. $\chi(v) = K/v$ のとき,

$$K < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

という条件の下で Winkler [5] により問題 (1) の時間大域解の存在が得られており, その解が時間に一様に有界になることが Fujie [1] により示されている. 一方, $\chi(v) = K/(a+v)^k$ の場合, Winkler [4] によりすべての $K > 0$ に対して問題 (1) の有界な時間大域解の存在が主張されていたが, その証明において本質的な間違いが見つけられている. 最近, Fujie [2] により修正が試みられているが, まだ完全に修正はされていない. そのため, $\chi(v) = K/(a+v)^k$ のときの大域解の存在と有界性を導出する条件はまだ得られていない. また, $\chi(v) = K/v$ のときと $\chi(v) = K/(a+v)^k$ のときは別々に考えられており, 両者の数学的なつながりは解明されていない.

本研究の目的は, 問題 (1) の大域解の存在と有界性を導出する χ の適切な条件を明確にし, $\chi(v) = K/v$ と $\chi(v) = K/(a+v)^k$ の場合を数学的につなげることである.

* 本講演は横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

主定理 ([3])

初期値 u_0, v_0 , 感応性関数 χ はそれぞれ (A1), (A2) を満たすとし, $K > 0$ に対して

$$(A3) \quad K < k(a + \eta)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

が成り立つと仮定する. ここで, η はある定数 $c_0 > 0$ を用いて次のように表せる:

$$\eta := \sup_{\tau > 0} \left(\min \left\{ e^{-2\tau} \min_{x \in \Omega} v_0(x), c_0 \|u_0\|_{L^1(\Omega)} (1 - e^{-\tau}) \right\} \right).$$

このとき, (1) の時間大域的古典解が一意的に存在し, 次の意味で有界である:

$$\exists C > 0; \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{for all } t \geq 0.$$

注意. 条件 (A3) は大域解の存在と有界性を導出する自然な条件となっている. 実際, $k = 1$ のとき, 条件 (A3) は $\chi(v) = K/v$ のときの条件になる:

$$K < \left(k(a + \eta)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n}} \right) \Big|_{k=1} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

証明の鍵 条件 (A1) における $K/(a + v)^k$ を用いてテスト関数 $\varphi_r(v)$ を

$$\varphi_r(v) = \exp \left\{ -r \int_0^v \frac{K}{(a + s)^k} ds \right\}$$

とおき, 問題 (1) の解 (u, v) とある定数 $\varepsilon \in [0, 1)$, $r, c > 0$ に対して,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi_r(v) + \varepsilon p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi_r(v) |\nabla u|^2 \leq c \int_{\Omega} u^p \varphi_r(v) - r \int_{\Omega} u^{p+1} \frac{\varphi_r(v)}{(a + v)^k}$$

を導出することが証明の鍵である. ここで, この証明は $k > 1$ の場合だけでなく $k = 1$ でも有効なため, これにより $\chi(v) = K/v$ と $\chi(v) = K/(a + v)^k$ の場合を数学的につなげることができた.

参考文献

- [1] K. Fujie, *Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), 675–684.
- [2] K. Fujie, *Study of reaction-diffusion systems modeling chemotaxis*, Doctoral thesis, 2016.
- [3] M. Mizukami, T. Yokota, *A unified method for boundedness in fully parabolic chemotaxis systems with signal-dependent sensitivity*, submitted.
- [4] M. Winkler, *Absence of collapse in a parabolic chemotaxis system with signal-dependent sensitivity*, Math. Nachr. **283** (2010), 1664–1673.
- [5] M. Winkler, *Global solutions in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity*, Math. Methods Appl. Sci. **34** (2011), 176–190.