時間に依存する変数係数をもつSchrödinger 方程式の解の波面集合について[1]

小川　哲也　(東京理科大学大学院理学研究科)

本研究では, 以下の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$(1)\qquad \begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j} a_{j,k}(t,x)\partial_{x_k} u = 0, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで, $i=\sqrt{-1}, n\in\mathbb{N}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, a_{j,k}(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ は実数値関数であり, 各 $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ に対して $a_{j,k}(t,x)=a_{k,j}(t,x)$ を満たすとする. さらに $a_{j,k}$ に関して以下の仮定をする.

仮定. $\rho>1$ とする. 任意の多重指標 α に対して, ある $C_\alpha>0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha(a_{j,k}(t,x)-\delta_{j,k})| \le C_\alpha(1+|x|)^{-\rho-|\alpha|}, \qquad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

が $j,k=1,...,n$ に対して成立する. ここで $\delta_{j,k}$ はクロネッカーのデルタである.

上記の仮定の下, 波束変換を用いて $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して (1) の解の波面集合を決定することが本研究の目的である. 波束変換による解の波面集合は K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito [1] により $a_{j,k}=\delta_{j,k}$ 及び調和振動子の場合が, K. Kato, S. Ito [2] によって時間に依存するポテンシャルを持つ場合が研究されている. また S. Nakamura [3] により $a_{j,k}(t,x)$ が時間に依存しない場合に波束変換を用いない方法による研究がされている.

定義. (波面集合) $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), (x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ とする. このとき
$(x_0,\xi_0)\notin WF(f) \iff$ ある $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で $\chi(x_0)\neq 0$ を満たすものと, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して以下が成立する : 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して, ある C_N が存在して $|\widehat{\chi f}(\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{-N}$ が任意の $\xi\in\Gamma$ に対して成り立つ.
ここで錐近傍とは $\xi\in\Gamma, \alpha>0$ のとき $\alpha\xi\in\Gamma$ を満たす近傍である. また, $\widehat{f}$ で f のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$ を表す.

定義. (波束変換) $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする. このとき f の窓 φ による波束変換 $W_\varphi f$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy$$

によって定義する.

$\lambda\ge 1, \varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対して $\varphi_\lambda^{(t)}(x) = \varphi_\lambda(t,x) = e^{\frac{i}{2}t\Delta}\lambda^{\frac{n}{4}}\varphi_0(\lambda^{1/2}x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{i}{2}t|\xi|^2}\lambda^{\frac{n}{4}}\widehat{\varphi_0(\lambda^{1/2}x)}](x)$ と定める. [2] を参考にして, 波束変換による波面集合の特徴づけを用いることで以下の定理を得た.
定理. $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. $u(t,x)$ を (1) の解で $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属するものとする. このとき
$(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t,x)) \iff x_0$ の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して以下が成立する : 任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $a\ge 1$ と任意の $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対して $C_{N,a,\varphi_0}>0$ があって $|W_{\varphi_\lambda^{(-t)}}u_0(x(0,t,x,\lambda\xi),\xi(0,t,x,\lambda\xi))| \le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}$ が $\lambda\ge 1, (x,\xi)\in K\times\Gamma$ かつ $a^{-1}\le|\xi|\le a$ に対して成立する. ここで $x(s,t,x,\xi), \xi(s,t,x,\xi)$ は
$\begin{cases} \dot{x}(s) = \frac{\partial H}{\partial \xi}(x(s),\xi(s)) \ ,\ x(t)=x \\ \dot{\xi}(s) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(s),\xi(s)) \ ,\ \xi(t)=\xi \end{cases}$ の解であり, $H(x,\xi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(t,x)\xi_j\xi_k$ である.

References

[1] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to time dependent Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J. Math. Vol. 47 No.2 (2011), 175–183.

[2] K. Kato, S. Ito, Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential, SUT J. Math. Vol. 50 No.2 (2014), 383–398.

[3] S. Nakamura, Wave front set for solutions to Schrödinger equations, J. Funct. Anal. 256 (2009), 1299–1309.

[1]本講演は加藤圭一氏, 米山泰祐氏との共同研究に基づく