

The blow-up curve of solutions for a system of nonlinear wave equations

佐々木 多希子 (明治大学 理工学部 数学科)*

次の非線形波動方程式系

$$\begin{cases} \square_{c_i} u_i = F_i(u, \partial_t u), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad i = 1, 2, \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x), \quad \partial_t u_i(0, x) = u_{1,i}(x), & x \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (1)$$

を考える。ここで、 $c > 0$ に対して $\square_c = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2$ であり、 c_1, c_2 は正定数である。また、 $u = (u_1, u_2)$ である。(1)の解は、初期値が十分大きい時に有限時間で爆発することが知られている。ここでは、各 x で $|\partial_t(u_1 + u_2)|$ が発散する時刻、

$$T(x) = \sup \{t \in (0, \infty) \mid |\partial_t(u_1 + u_2)(x, t)| < \infty\}$$

に関心がある。 T を (1) の爆発曲線と呼ぶ。

非線形波動方程式の爆発曲線に関する問題は、単独の非線形波動方程式

$$\begin{cases} \square_1 u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

の場合によく研究されていた。Caffarelli-Friedman [1] は、 $F = |u|^p$ のときに、初期値を十分滑らかで大きくとれば、

$$\tilde{T}(x) = \sup \{t \in (0, \infty) \mid |u(x, t)| < \infty\}$$

が連続微分可能になることを示した。また、Ohta-Takamura [2] により $F = (\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2$ の場合に、 \tilde{T} が連続微分可能になる解や、連続微分可能にならない解が構成できることが示された。また、Sasaki [4] は $F = |\partial_t u|^p$ である場合に、初期値が十分滑らかで大きいとき、

$$\hat{T}(x) = \sup \{t \in (0, \infty) \mid |\partial_t u(x, t)| < \infty\}$$

が連続微分可能になることを示した。

一方で、非線形方程式系 (1) に対しては、 $F_i = a_i |u_1|^{p_i} + b_i |u_2|^{q_i}$ ($i = 1, 2$) である場合に、爆発曲線がリプシッツ連続になることが Uesaka [3] により示された。しかし、その連続微分可能性については未解決のままだった。

本講演では (1) に対し、 $F_1 = |\partial_t u_2|^{p_2}, F_2 = |\partial_t u_1|^{p_1}$ とし、初期値を十分滑らかで大きく取った場合に、爆発曲線 T が連続微分可能になるという結果を得たので、これを報告する。

参考文献

- [1] L. A. Caffarelli and A. Friedman: *The blow-up boundary for nonlinear wave equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), no. 1, 223–241.
- [2] M. Ohta and H. Takamura: *Remarks on the blow-up boundaries and rates for nonlinear wave equations*, Nonlinear Anal., **33** (1998), no. 7, 693–698.
- [3] H. Uesaka: *The blow-up boundary for a system of semilinear wave equations*, Further progress in Analysis, (2009), 845–853.
- [4] T. Sasaki: *Regularity and singularity of the blow-up curve for a wave equation with a derivative nonlinearity*, Adv. Differential Equations, accepted for publication.

本研究は科研費(課題番号:16H07288)の助成を受けたものである。

*e-mail: takiko@meiji.ac.jp