Remarks on minimizers for (p,q)-Laplace equations with two parameters

東京理科大学理学部第一部数学科　田中　視英子

本講演は Vladimir Bobkov (University of West Bohemia, Czech Republic) との共同研究に基づくものである.

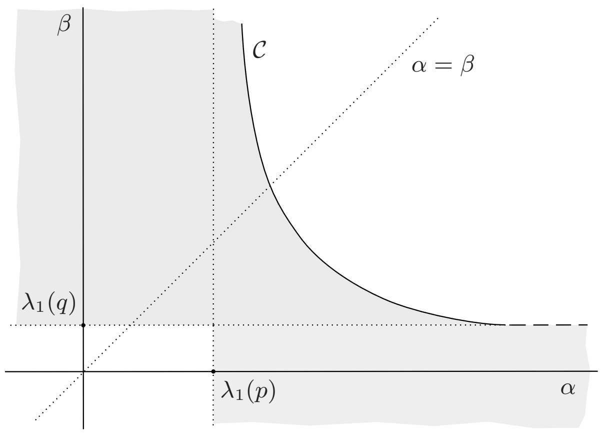
以下の (p,q)-Laplace 方程式が正値解をもつような係数 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ について考える:

$$(GEV;\alpha,\beta)\qquad \begin{cases} -\Delta_p u-\Delta_q u=\alpha|u|^{p-2}u+\beta|u|^{q-2}u & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで, $1<q<p<\infty$, Ω は有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は C^2 級とする.

1. 係数の決定

[1] では $(GEV;\alpha,\beta)$ が正値解を持つような係数 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ については完全に決定され, 以下の図のようになっていることを示した. 以下では, $\lambda_1(r)$ は $-\Delta_r$ の第一固有値, φ_r で $\lambda_1(r)$ に対応する正値第一固有関数を表すこととする.



変分法的手法で正値解の存在を得る為の代表的なものに, 方程式に対応するエネルギー汎関数の Global minimizer, Ground state (最小エネルギー解), Mountain Pass point などの存在を示す手法がある. 本講演では, これらに着目して得られた結果（下記図を参照）について話す予定である. また, [1] では得られて無かった正値解の多重性についても触れる予定である.

2. Variational setting

- 方程式 $(GEV;\alpha,\beta)$ に対応する（エネルギー）汎関数 $E_{\alpha,\beta}\in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$:

$$E_{\alpha,\beta}(u):=\frac{1}{p}H_\alpha(u)+\frac{1}{q}G_\beta(u),\quad \text{for } u\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$\text{where}\quad H_\alpha(u):=\|\nabla u\|_p^p-\alpha\|u\|_p^p \quad\text{and}\quad G_\beta(u):=\|\nabla u\|_q^q-\beta\|u\|_q^q.$$

- $E_{\alpha,\beta}$ の Nehari 多様体を $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}$ で表すこととする．すなわち，

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta} := \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \,:\, \langle E'_{\alpha,\beta}(v), v\rangle = H_\alpha(v) + G_\beta(v) = 0\}.$$

- $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}$ 上での $E_{\alpha,\beta}$ の下限 $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$d(\alpha,\beta) := \inf\{E_{\alpha,\beta}(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_{\alpha,\beta}\} \quad \text{for } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,$$

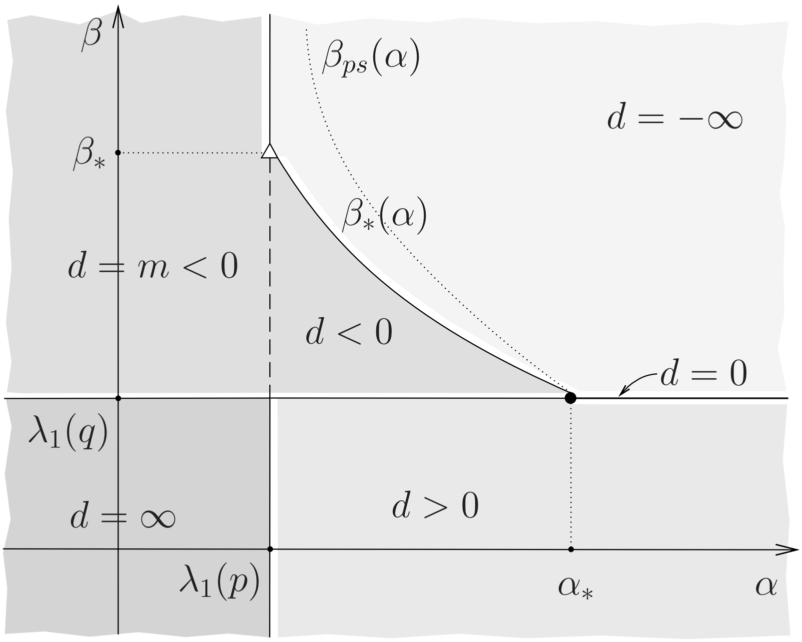
  ただし，$d(\alpha,\beta) = \infty$ if $\mathcal{N}_{\alpha,\beta} = \emptyset$.

- $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が $d(\alpha,\beta)$ を達成するとき，u は $E_{\alpha,\beta}$ の ground state と呼ぶ.

$$\text{すなわち} \qquad u \in \mathcal{N}_{\alpha,\beta} \quad \text{and} \quad E_{\alpha,\beta}(u) = d(\alpha,\beta).$$

3. Main Results

最小エネルギー d に関する主な結果は以下の図のようになる．とくに，時間があれば $(\lambda_1(p), \beta_*)$ で ground state の存在と非存在が $p = 2q$ を境に変化することについても述べるつもりである．



The global minimum m, The least energy d

ここで $\alpha_* := \|\nabla\varphi_q\|_p^p / \|\varphi_q\|_p^p$, $\beta_* := \|\nabla\varphi_p\|_q^q / \|\varphi_p\|_q^q$ である．

参考文献

[1] V. Bobkov, and M. Tanaka, On positive solutions for (p,q)-Laplace equations with two parameters. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54(3) (2015), 3277–3301.

[2] V. Bobkov and M. Tanaka, Remarks on minimizers for (p,q)-Laplace equations with two parameters. (submitted)