

反応拡散方程式に対する自由境界問題の解の漸近挙動

山田義雄（早稲田大学 理工学術院）

本講演は兼子裕大氏（早稲田大学 理工学術院），河合優佑氏（早稲田大学大学院基幹理工学研究科）との共同研究に基づく．

アブストラクト

数理生態学における生物種の侵入・移動現象をモデルとする自由境界問題を考える．空間次元が1の場合に定式化すると次のような問題となる：

$$(FBP) \quad \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t, 0) = u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq h_0. \end{cases}$$

ここで d, μ, h_0 は正定数， f は C^1 級関数で $f(0) = f(u^*) = 0, f'(u^*) < 0, f(u) < 0$ ($u > u^*$) を満たすとする．(FBP) において $u = u(t, x)$ は生物種の個体数密度を表し，区間 $I_t = [0, h(t)]$ が種の生息域である．区間 I_t の片側の境界 $x = h(t)$ は生息域の最前線を表し，自由境界として Stefan 型条件によって時間とともに広がる．このような自由境界問題は 2010 年に Y.Du-Z.Lin によって提起され， $f(u)$ がロジスティック型反応項の場合，Spreading-vanishing 択一定理をはじめとして，解の挙動や性質について数々の興味深い性質が証明された．彼らの研究をきっかけに (FBP) は多くの研究者の関心を引くようになった．反応項が単安定型，双安定型，燃焼型のケースなど，それぞれの場合に応じて (FBP) の解の性質について非常に詳しい結果が得られている．

本講演では Holling III 型と呼ばれる反応項をもとに，新しいタイプの解挙動が得られることを示す． C^1 級関数 $f(u)$ は4つの零点 $0, u_1, u_2, u_3$ (ただし $0 < u_1 < u_2 < u_3$) を持ち，

$$f'(0) > 0, f'(u_1) < 0, f'(u_2) > 0, f'(u_3) < 0, \quad \int_{u_1}^{u_3} f(u) du > 0.$$

を満たすと仮定する．このとき (FBP) の解 (u, h) について次のような結果が成り立つ：

- (FBP) の解の挙動は vanishing, big spreading, small spreading, transition の4つのタイプに部類される：

- 自由境界が $h(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) を満たす場合， $h(t)$ の展開速度は一定の定数に収束し，この値は初期関数と無関係に定まる

- 自由境界が $h(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) を満たす場合， $u(t, x)$ の漸近的形状について詳しい評価が得られる

また状況によっては，テラス形状を伴う解が登場することや

- (FBP) における固定境界条件を Dirichlet 境界条件に置き換えた場合，類似の結果や相違点はどこに現れるか？

などの課題についても最新の成果を紹介したい．