劣2次のポテンシャルを持つSchrödinger 方程式の解の H^s 型波面集合

安部 文人 (東京理科大学大学院理学研究科)

本研究では, 次の Schrödinger 方程式の初期値問題の解の滑らかさについての考察を行う.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = V(t,x)u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$ である. ここで, $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし, $V(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ は実数値関数とする. さらに $V(t,x)$ に対しては以下の仮定をする.

仮定. $\rho < 2$ が存在して, 任意の多重指数 α に対して定数 C_α が存在し, 次が成立する:

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}, \qquad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

この仮定の下, 波束変換を用いて u_0 に対する (1) の解 u の H^s 型波面集合を決定することが本研究の目的である.

定義 1 (波束変換)**.** $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, 窓関数 φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を以下で定義する:

$$W_\varphi f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

定義 2 (H^s 型波面集合)**.** $s \in \mathbb{R}$ と $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, $WF_{H^s}(f) \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ を以下で定義する.
$(x_0,\xi_0) \notin WF_{H^s}(f) :\Leftrightarrow \chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ $\chi(x_0) \neq 0$ をみたす χ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 次をみたす:

$$\langle\xi\rangle^s\, |\widehat{(\chi f)}(\xi)| \in L^2(\Gamma).$$

ここで, ξ_0 の錐近傍 Γ とは, $\xi \in \Gamma, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha\xi \in \Gamma$ をみたす ξ_0 の近傍で, $\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

[1] では波束変換を用いた波面集合の特徴づけが考察されている. [2] を参考に以下の結果を得た.

主結果. $s \in \mathbb{R}$ とし, $u(t,x) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ を (1) の解とする. 仮定の下 (i), (ii), (iii) は同値:
(i) $(x_0,\xi_0) \notin WF_{H^s}(u(t_0,\cdot))$.
(ii) $b = \min(\frac{2-\rho}{4}, \frac{1}{4})$ ととる. ある $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 次をみたす:

$$\int_1^\infty \lambda^{2s+n-1} \|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}} u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi), \xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\|_{L^2(K\times V)}^2 d\lambda < +\infty. \tag{2}$$

ここで, $\varphi_{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{nb}{2}}\varphi_0(\lambda^b x) \quad (\lambda \ge 1), \quad \varphi_\lambda^{(t)}(x) = e^{\frac{i}{2}t\Delta}\varphi_{0,\lambda}(x)$ であり, $x(\tau;t_0,x,\xi), \xi(\tau;t_0,x,\xi)$ は (3) の解

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) &= \xi(\tau), \quad x(t_0) = x, \\ \dot{\xi}(\tau) &= -\nabla_x V(\tau, x(\tau)), \quad \xi(t_0) = \xi. \end{cases} \tag{3}$$

(iii) $b = \min(\frac{2-\rho}{4}, \frac{1}{4})$. x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在し, 任意の $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して (2) をみたす.

参考文献

[1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, “Remark on characterization of wave front set by wave packet transform”, Osaka Journal of Math., **54**, No.2, (2017), 209–228.

[2] K. Kato and S. Ito, “Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential”, SUT Journal of Math., **50**, No.2, (2014), 383–398.

---

*本講演は加藤 圭一氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく