Uniqueness of ground states for nonlinear Schrödinger equations with attractive inverse power potential

深谷　法良 (東京理科大学) *

次の引力的な逆べき乗ポテンシャルを持つ非線形楕円型方程式について考える.

$$-\Delta\phi - \frac{\gamma}{|x|^\alpha}\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

ここで, $\phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は未知関数であり, N, γ, α, ω, p は次を満たすとする.

$$N \geq 2, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad \omega > \omega_0, \quad 1 < p < \begin{cases} \infty & \text{if } N = 2, \\ 1 + \dfrac{4}{N-2} & \text{if } N \geq 3. \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $-\omega_0 < 0$ は Schrödinger 作用素 $-\Delta - \gamma|x|^{-\alpha}$ の最小固有値とする. 作用汎関数 $S_\omega\colon H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ を

$$S_\omega(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^2}{|x|^\alpha}\,dx + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

で定めると (1) は $S_\omega'(\phi) = 0$ と書ける.

本講演では (1) の基底状態解の一意性について考える. (1) の**基底状態解**とは (1) の非自明解の中で作用 S_ω を最小にするものを言う. 方程式 (1) は次の非線形 Schrödinger 方程式の定在波解 $u(t,x) = e^{i\omega t}\phi(x)$ が満たす定常問題として現れる.

$$i\partial_t u = -\Delta u - \frac{\gamma}{|x|^\alpha}u - |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

(3) の基底状態定在波解の安定性と不安定性については [1, 2, 3, 4] 等で研究されている. 基底状態定在波解の安定性の研究においてその一意性は基本的かつ重要な問題である.

$\mathcal{G}_\omega$ を基底状態解全体の集合とする:

$$\mathcal{G}_\omega = \left\{ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \neq 0,\ S_\omega'(\phi) = 0 \\ S_\omega(\phi) = \inf\{S_\omega(\psi) \mid \psi \neq 0,\ S_\omega'(\psi) = 0\} \end{array} \right\}.$$

* *E-mail address*: `1116702@ed.tus.ac.jp`

仮定 (2) の下では, $\mathcal{G}_\omega$ は空でないことが知られている. $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が (1) の解であるならば楕円型方程式の正則性の議論により $\phi \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であることがわかる. また ϕ と $\nabla\phi$ は空間遠方で指数減衰することもわかる. さらに次が成り立つ.

命題 1. *$\phi \in \mathcal{G}_\omega$ ならば, ある $\theta \in \mathbb{R}$ があって $e^{i\theta}\phi$ は正値球対称となる.*

命題 1 は基底状態解の変分的特徴付け, Schrödinger 作用素の正値固有関数の一意性及び球対称再配列の議論を用いて証明される. 正値球対称な基底状態解 $\phi \in \mathcal{G}_\omega$ を動径方向の関数 $\phi(r)$ とみなせばこれは次の常微分方程式の正値解である.

$$\begin{cases} \phi'' + \dfrac{N-1}{r}\phi' - \left(\omega - \dfrac{\gamma}{r^\alpha}\right)\phi + \phi^p = 0, \quad r > 0, \\ \phi(0) > 0. \end{cases} \tag{4}$$

次が主結果である.

定理 2. *空間遠方で減衰する (4) の正値解は一意である.*

命題 1 と定理 2 の帰結として次の基底状態解の一意性を得る.

系 3. *$\phi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ を正値球対称な (1) の解とすると*

$$\mathcal{G}_\omega = \{e^{i\theta}\phi_\omega \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

定理 2 の証明には Shioji–Watanabe [5, 6] による一般化 Pohožaev 等式の議論を用いる. Shioji–Watanabe [5, 6] は常微分方程式

$$\phi'' + \frac{f(r)}{f(r)}\phi' - g(r)\phi + h(r)\phi^p = 0, \quad r > 0 \tag{5}$$

の遠方で減衰する正値解の一意性を f, g, h に対する一般的な仮定の下で示している. しかし今考えている $f(r) = r^{N-1}$, $g(r) = \omega - \gamma r^{-\alpha}$, $h(r) = 1$ の場合は原点での特異性がある程度強いため, α, p によっては [5, 6] の仮定を満たさないことがある. そのため, [5, 6] の定理を直接適用することはできないが, $\phi'(r)$ の原点でのオーダーをより詳細に調べ, 議論を修正することにより定理 2 が証明できる.

References

[1] N. Fukaya and M. Ohta, *Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with attractive inverse power potential*, to appear in Osaka J. Math.

[2] R. Fukuizumi and M. Ohta, *Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Differential Integral Equations **16** (2003), 111–128.

[3] R. Fukuizumi and M. Ohta, *Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Differential Integral Equations **16** (2003), 691–706.

[4] X. Li, *Orbital stability of standing waves for Schrödinger type equations with slowly decaying linear potential*, preprint, arXiv:1812.06738.

[5] N. Shioji and K. Watanabe, *A generalized Pohožaev identity and uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u+g(r)u+h(r)u^p = 0$, J. Differential Equations **255** (2013), 4448–4475.

[6] N. Shioji and K. Watanabe, *Uniqueness and nondegeneracy of positive radial solutions of* $\mathrm{div}(\rho\nabla u) + \rho(-gu + hu^p) = 0$, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), Art. 32, 42.