Blow-up in a degenerate Keller–Segel system*

柱 貴裕 (東京理科大学大学院理学研究科)

次の退化型 Keller–Segel 系を初期条件及び Neumann 境界条件の下で考える:

$$\text{(KS)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u^m - \nabla \cdot (u^{q-1} \nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

ここで, $\Omega := B_R \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2, R > 0)$ は中心が原点で半径 R の開球, $m \geq 1$, $q \geq 2$ とする.

問題 (KS) は, ある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる走化性という性質をもつ生物 (密度 u) の運動を記述した数理モデルである．特に $m > 1$ (退化型方程式) の場合, 拡散項 $\Delta u^m = \nabla \cdot (mu^{m-1} \nabla u)$ の係数は $mu^{m-1}\big|_{u=0} = 0$ を満たすことから, 生物がいない場所での拡散現象が起こらないことを表している．この問題に対して, 与えられた初期状態から生物がどのように移動するか, 特に, 生物が拡散するか, または集中するかを解明することがこの分野における大きな研究課題である．ここで, 生物学における集中現象は数学的には解の爆発として特徴付けられる．本研究における解の爆発とは, 解 (u, v) が

$$\exists T \in (0, \infty]; \quad \limsup_{t \to T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

を満たすことである．本研究では, 有限時刻で爆発する (KS) の解の存在について考える.

一般に, 退化型方程式の解の滑らかさは期待できないが, 問題 (KS) で第一方程式を非退化型方程式

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla (u + \varepsilon)^m - (u + \varepsilon)^{q-2} u \nabla v) \quad (\varepsilon > 0)$$

に置き換えた問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ は, 狭義に正値で滑らかな解をもつため比較的扱いやすい．そのため, これまでの研究では, 非退化型の問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ と退化型の問題 (KS) について以下の結果が得られている:

(i) $q > m + \frac{2}{N}$ のとき, 有限時刻で爆発する $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ の解を与える初期値の存在 (Cieślak–Stinner [1]).
(ii) $q > m + \frac{2}{N}$ のとき, 非有界な (KS) の弱解を与える初期値の存在 (Ishida–Yokota [2]).

以上の (i), (ii) を比較すると, 退化型の問題 (KS) においては, 解の爆発時刻が有限か無限かが明らかになっていない. **本研究では, 非退化型の場合の [1] の方法を改良し, [2] では得られていない有限時刻で爆発する (KS) の弱解を与える初期値を構成した.**

主結果

$N \geq 2$, $m \geq 1$, $q \geq 2$ とし, N, m, q は

$$q > m + \frac{2}{N}$$

を満たすものとする．このとき, 有限時刻で爆発する (KS) の弱解を与える初期値が存在する.

<u>証明の鍵</u>: 問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ を扱う [1] では, 走化性項 $-\nabla \cdot ((u + \varepsilon)^{q-2} u \nabla v)$ に対して $(u + \varepsilon)^{q-2} \geq \varepsilon^{q-2} > 0$ を仮定している．この下からの評価によって, 証明中に現れる u の負べキを評価していた．本研究では, この下からの評価が得られない難点を**積分範囲を分ける**ことで解決した.

参考文献

[1] T. Cieślak, C. Stinner, *Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller–Segel system in higher dimensions*, J. Differential Equations, 252 (2012), 5832–5851.

[2] S. Ishida, T. Yokota, *Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic-parabolic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 18 (2013), 2569–2596.

*本講演は石田祥子氏 (千葉大学), 横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.