Behaviour of solutions to a three-dimensional two-species chemotaxis-Navier–Stokes system*

平田美沙季　(東京理科大学大学院理学研究科)

次のような chemotaxis-Navier–Stokes 方程式について考える:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} (n_1)_t + u\cdot\nabla n_1 = \Delta n_1 - \nabla\cdot(n_1\nabla c) + n_1(1-n_1-a_1n_2), & x\in\Omega,\ t>0,\\ (n_2)_t + u\cdot\nabla n_2 = \Delta n_2 - \nabla\cdot(n_2\nabla c) + n_2(1-a_2n_1-n_2), & x\in\Omega,\ t>0,\\ c_t + u\cdot\nabla c = \Delta c - (n_1+n_2)c, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u_t + (u\cdot\nabla)u = \Delta u + \nabla P + (n_1+n_2)\nabla\Phi, \quad \nabla\cdot u = 0, & x\in\Omega,\ t>0. \end{cases}
$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ は滑らかな境界をもつ有界領域で, a_1, a_2 は非負の定数である. n_1, n_2, c は Neumann 境界条件を満たす実数値の未知関数とし, u は Dirichlet 境界条件を満たすベクトル値の未知関数であり, それぞれの $t=0$ における値を $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0$ とし, 既知関数とする. また, P は未知関数であり, Φ は既知関数である. さらに

$$
\begin{aligned}
&0 < n_{1,0}, n_{2,0} \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < c_0 \in W^{1,q}(\Omega), \quad u_0 \in D(A^\theta),\\
&\Phi \in C^{1+\lambda}(\overline{\Omega}) := \{ f \in C^1(\overline{\Omega}) \mid f \text{ の偏導関数は } \lambda \text{ 次 Hölder 連続 } \}
\end{aligned}
$$

を仮定する. ただし $q>3$, $\theta\in(\frac{3}{4},1)$, $\lambda\in(0,1)$ で, A は Stokes 作用素を表している.

問題 (P) は, 流体中のある化学物質に引き寄せられる走化性 (chemotaxis) という性質をもった 2 種類の生物の動きを記述した数理モデルである. $n_2=0$ の場合, すなわち 1 種類の生物の場合は, Lankeit [2] により時間大域的弱解 (講演中に定義する) の存在, 時間遠方での解の正則性及び解の漸近挙動 ($n_1(\cdot,t)\to 1$ $(t\to\infty)$) が示されている. **本研究では, [2] では考察されていない 2 種の chemotaxis-Navier–Stokes 方程式での時間大域的弱解の存在, 時間遠方での解の正則性及び解の漸近挙動に関する結果を得た.**

結果 1

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ は滑らかな境界をもつ有界領域で, $a_1, a_2 \ge 0$, $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0, \Phi$ は上述の条件を満たすとする. このとき, (P) の時間大域的弱解が存在する.

結果 2

結果 1 の仮定が満たされているとし, $a_2\in(0,1)$ とすると, ある $T>0$ が存在して, 結果 1 で得られた弱解 (n_1, n_2, c, u) は $n_1, n_2, c, u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[T,\infty))$ を満たし, さらに次が成り立つ:

$$
n_1(\cdot,t)\to N_1, \quad n_2(\cdot,t)\to N_2, \quad c(\cdot,t)\to 0, \quad u(\cdot,t)\to 0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty).
$$

ただし $a_1, a_2\in(0,1)$ のとき $N_1 := \frac{1-a_1}{1-a_1a_2}$, $N_2 := \frac{1-a_2}{1-a_1a_2}$, $a_1\ge 1 > a_2 > 0$ のとき $N_1 := 0$, $N_2 := 1$ で, $C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[T,\infty)) := \{ f\in C(\overline{\Omega}\times[T,\infty)) \mid f_{x_i}, f_{x_ix_j}, f_t \in C(\overline{\Omega}\times[T,\infty))\ (1\le i,j\le 3)\}$ である.

【注意】$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の場合はすでに研究されている (H.–Kurima–Mizukami–Yokota [1]).

証明の鍵: 弱解の存在については Lankeit [2] と同様のエネルギー関数を評価することで示したが, **1 種の場合では出てこなかった競合項の部分の処理を少し工夫することで解決した.** また, 解の漸近挙動については **Mizukami [3] で導入されたエネルギー関数を修正し, コンパクト性の方法を利用することで解決した.**

参考文献

[1] M. Hirata, S. Kurima, M. Mizukami, T. Yokota, *Boundedness and stabilization in a two-dimensional two-species chemotaxis-Navier–Stokes system with competitive kinetics*, J. Differential Equations, 263 (2017), 470–490.

[2] J. Lankeit, *Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source*, Math. Models Methods Appl. Sci., 26 (2016), 2071–2109.

[3] M. Mizukami, *Boundedness and asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal-dependent sensitivity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 22 (2017), 2301–2319.

*本講演は来間俊介氏 (東京理科大学), 水上雅昭氏 (東京理科大学), 横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.