

非凸領域における 0-Neumann 境界条件付き Allen-Cahn 方程式に対する特異極限問題

可香谷 隆 (九州大学, マス・フォア・インダストリ研究所) *

平均曲率流は、曲面の発展を記述する偏微分方程式であり、位相変化を始めとした、特異性の発生を伴うモデルである。その特異性を伴う曲面の発展を記述・解析するために、幾何学的測度論を用いた Brakke flow と呼ばれる弱解が用いられてきた。その弱解の時間大域的存在性理論は多種多様であり、その存在性理論の一つとして、Allen-Cahn 方程式に対する特異極限を用いた Brakke flow の構成が挙げられる。

本講演では、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つ領域とする。 Ω 内の 90 度接触角条件付き平均曲率流は、 Ω の凸性等の $\partial\Omega$ の形状により、位相変化を伴うことが予想される。したがって、 Ω における Neumann 境界条件付き Allen-Cahn 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \frac{W'(u_\varepsilon)}{\varepsilon^2}, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_{\varepsilon,0}(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

を用いた 90 度接触角条件付き Brakke flow の構成を考察する。ただし、 $\varepsilon > 0$ はパラメータ、 ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとし、二重井戸型ポテンシャル $W \in C^\infty(\mathbb{R})$ は簡単のため、 $W(s) = (1 - s^2)^2$ とする。 Ω が凸の場合、Mizuno-Tonegawa[1] により、(1) の解に対する 90 度接触角条件付き平均曲率流の Brakke 解への収束性が示されている。本講演では、Mizuno-Tonegawa[1] による特異極限問題の非凸領域上における特異極限問題への拡張を目標とする。また、以下の初期値 $u_{\varepsilon,0} \in C^1(\bar{\Omega})$ に対する条件を仮定する。

(A1) $\|u_{\varepsilon,0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1,$

(A2) ある $D_0 > 0$ が存在して、 $\sup_{x \in \Omega, r > 0} \int_{B_r(x) \cap \Omega} \frac{\varepsilon |\nabla u_{\varepsilon,0}(y)|^2}{2} + \frac{W(u_{\varepsilon,0}(y))}{\varepsilon} dy \leq D_0 r^{n-1},$

(A3) ある $c_1 > 0$ が存在して、 $\sup_{x \in \Omega} \varepsilon |\nabla u_{\varepsilon,0}| \leq c_1,$

(A4) ある $c_2 > 0$ と $\lambda \in [3/5, 1)$ が存在して、 $\sup_{x \in \Omega} \frac{\varepsilon |\nabla u_{\varepsilon,0}(x)|^2}{2} - \frac{W(u_{\varepsilon,0}(x))}{\varepsilon} \leq c_2 \varepsilon^{-\lambda},$

(A5) $x \in \partial\Omega$ に対して $\frac{\partial u_{\varepsilon,0}}{\partial \nu}(x) = 0.$

ただし、上記の定数は ε に依存しないものとする。上記の仮定を満たす初期値は、少なくとも $\partial\Omega$ との 90 度接触角条件を満たす Ω 内の円盤と同相な C^1 級の超曲面からの摂動として構成できる。また、上記の仮定を満たす初期値に対し、(1) は滑らかな時間大域解を持つ。そこで、(1) の解 u_ε に対し、 $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 測度 μ_ε^t を以下のように定める。

$$\mu_\varepsilon^t(\phi) := \int_{\Omega} \phi(x) \left(\frac{\varepsilon |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2}{2} + \frac{W(u_\varepsilon(x, t))}{\varepsilon} \right) dx \quad \text{for } \phi \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

このとき、以下の Radon 測度 μ_ε^t に対する収束性が成り立つ。

*E-mail: kagaya@imi.kyushu-u.ac.jp

定理 1 ([2]) ある 0 に収束する部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 測度の族 $\{\mu^t\}_{t \geq 0}$ が存在し、全ての $t \geq 0$ に対し、測度の意味での収束性 $\mu_{\varepsilon_i}^t \rightarrow \mu^t$ ($i \rightarrow \infty$) が成り立つ。さらに、ほとんど全ての $t \geq 0$ に対して、 μ^t は $(n-1)$ -修正可能測度である。

$\text{spt } \mu_{\varepsilon}^t \subset \bar{\Omega}$ と上記の収束性より、 $\text{spt } \mu^t \subset \bar{\Omega}$ が成り立つ。したがって、 μ^t が $(n-1)$ -修正可能測度となる時刻においては、 $(n-1)$ -修正可能集合 (“ほぼ C^1 級超曲面”) $M^t \subset \bar{\Omega}$ と重み関数 $\theta \in L^1(\mathcal{H}^{n-1}|_{M^t})$ が存在し、 μ^t は重み θ 付きの M^t の曲面積測度 (つまり、 $\mu^t = \theta \mathcal{H}^{n-1}|_{M^t}$) となる。ここで、上記の時刻において、 M^t と θ から自然に導入される $(n-1)$ -varifold V^t を定めると、 $\|V^t\| = \mu^t$ を満たす。他の時刻においては、 $\|V^t\| = \mu^t$ を満たす $(n-1)$ -varifold を任意に一つ固定する。

定理 2 ([2]) ほとんど全ての $t \geq 0$ に対し、全変動 $\|\delta V^t\|$ は $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 測度である。

したがって、定理 2 を満たす時刻においては、 V^t に対する一般化された平均曲率ベクトル h^t 、境界 Z^t 、co-normal ベクトル $\mathbf{n}^t$ が存在する。ここで、 V^t の第一変分 δV^t の $\partial\Omega$ の接空間上への制限として、

$$\delta V^t|_{\partial\Omega}^\top(g) := \delta V^t|_{\partial\Omega}(g - \langle g, \nu \rangle \nu) \quad \text{for } g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$$

を考える。

定理 3 ([2]) ほとんど全ての $t \geq 0$ に対して、

$$\|\delta V^t|_{\partial\Omega}^\top + \delta V^t|_{\Omega}\| \leq \|V^t\| \quad (2)$$

となる。したがって、Radon-Nikodym の定理より、 $\delta V^t|_{\partial\Omega}^\top + \delta V^t|_{\Omega} = -h_b^t \|V^t\|$ とでき、さらに、 $h_b^t \in L^2(\|V^t\|)$ を満たす。さらに、 $\partial\Omega \times [0, \infty)$ 上で $\langle \nabla \phi, \nu \rangle = 0$ を満たす $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty); \mathbb{R}^+)$ と $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ に対し、Brakke の不等式

$$\|V^t\|(\phi(\cdot, t)) \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} -\phi |h_b^t|^2 + \langle \nabla \phi, h_b^t \rangle + \partial_t \phi d\|V^t\| dt \quad (3)$$

が成り立つ。

定理 2 と (2) より、ほとんど全ての $t \geq 0$ で $Z^t \subset \partial\Omega$ を満たし、 $\mathbf{n}$ は $\|\delta V^t\|_{Z^t}$ に関してほとんど全ての点において $\partial\Omega$ と直行するため、 V^t は $\partial\Omega$ と測度的な意味で直行している。さらに、 h_b^t は $\|V^t\|$ に関してほとんど全ての Ω の内部の点で V^t の一般化された平均曲率ベクトル h^t に一致し、ほとんど全ての境界 $\partial\Omega$ の点において h^t を $\partial\Omega$ の接平面に射影したベクトルに一致する。また、(3) は $\partial\Omega$ との 90 度の接触角条件を課した平均曲率流 $\{\Gamma^t\}_{t \geq 0}$ に対するテスト関数 ϕ を重みとした面積の変動の一般化に相当する。

Allen-Cahn 方程式に対する特異極限問題においては、discrepancy $\frac{\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(u_\varepsilon)}{\varepsilon}$ に対する評価が鍵となる。本講演においては、従来の手法に $\partial\Omega$ からの距離関数を組み合わせることによって得られる以下の評価が鍵となる。

補題 4 ε に依存しない $C > 0$ が存在して、 $\sup_{(x,t) \in \Omega \times [0, \infty)} \frac{\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(u_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq C\varepsilon^{-\lambda}$ 。

参考文献

- [1] M. Mizuno and Y. Tonegawa, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 1906–1932.
- [2] T. Kagaya, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary condition on non-convex domains*, accepted to appear in Math. Ann. <https://rdcu.be/2zpf2>.