

随伴法を用いた自由境界問題に対する近似解の収束率^{*1}

小杉 卓裕 (福岡工業大学)

適切な仮定の下においてエネルギー汎関数

$$I(v) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Dv|^2 - fv \right) dx \quad \text{for } v \in H_0^1(\Omega)$$

を $H_0^1(\Omega)$ の閉凸部分集合 K 上最小化する函数 $u = \inf_K v \in H_0^1(\Omega)$ が一意に存在することはよく知られている. 閉凸部分集合 K として函数の上と下から制限がついた集合

$$K := \{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \Psi \leq v \leq \Phi \quad \text{a.e. in } \Omega \}$$

ととった変分問題は障害物問題と呼ばれ, そのオイラー・ラグランジュ方程式は次のようになる:

$$\min \{ \max \{ -\Delta u - f, u - \Phi \}, u - \Psi \} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1)$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな有界領域, $f \in C^2(\overline{\Omega})$ とし, 障害物 $\Phi, \Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ は次をみたすとする:

$$\Psi \leq \Phi \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \Psi \leq 0 \leq \Phi \quad \text{in } \Omega.$$

障害物問題を考える場合, 方程式の複雑さからしばしば処罰法による近似方程式を建てる:

$$-\Delta u^\varepsilon + \beta \left(\frac{u^\varepsilon - \Phi}{\varepsilon} \right) - \beta \left(\frac{\Psi - u^\varepsilon}{\varepsilon} \right) = f \quad \text{in } \Omega. \quad (2)$$

ここで $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ はリプシッツ連続かつ凸で次をみたす函数とする.

$$\beta(r) := \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq 0, \\ r - 1 & \text{for } r \geq 2. \end{cases}$$

方程式 (2) は古典解 u^ε をもち, 方程式 (1) の一意粘性解 u に一様収束することが知られている.

ハミルトン・ヤコビ方程式に対して粘性消滅項を加えたことによる近似方程式の近似解の収束率は, 1964 年 Fleming [4, 5] により確率ゲーム的に, 1984 年に Crandall-Lions [2] により粘性解的に導かれた. また, 2010 年には Evans [3] が非線形随伴法を導入し, 同様の結果を得ている. その後, 非線形随伴法を用いた関連する結果として [8], [1], [7] が挙げられる.

本講演の目的は [3] が導入した非線形随伴法を用いることで, 有界領域上における 2 階の線形楕円型方程式の障害物問題 (1) の処罰方程式 (2) による近似解の収束率を得ることである.

定理 1 ([6]). 方程式 (2) の古典解を u^ε , 方程式 (1) の粘性解を u とする. このとき,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

が成り立つ.

^{*1} 小池茂昭 教授 (東北大学), 内藤誠 氏 との共同研究

この定理を得るために, (2) の線形化作用素の随伴を L^* とし, 次の随伴方程式を考える:

$$\begin{cases} L^* \sigma = \delta_{\hat{x}} & \text{in } \Omega, \\ \sigma = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

ここで, $\hat{x} \in \Omega$ とし, $\delta_{\hat{x}}$ は $\hat{x}$ におけるディラック測度を表す. 随伴方程式 (3) について以下の補題を得ることにより定理 1 が導かれる.

補題 2. 1. $\sigma \geq 0$ in $\overline{\Omega}$.

2. ある定数 $C > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\beta'(u^\varepsilon - \Phi)}{\varepsilon} + \frac{\beta'(\Psi - u^\varepsilon)}{\varepsilon} + 1 \right) \sigma dx \leq C.$$

3. ある定数 $C > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} |D^2 u^\varepsilon|^2 \sigma dx dt \leq C.$$

上の内容は $-\Delta$ を一般の一様楕円型線形作用素

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \quad (a^{ij}, b^i, c \in C^2(\overline{\Omega}), c \geq 0)$$

としても成り立つ. また, 勾配拘束問題および平均曲率流方程式に対する適用可能性についても触れる.

参考文献

- [1] F. Cagnetti and D. Gomez and H. V. Tran, Adjoint methods for obstacle problems and weakly coupled systems of PDE. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 3, 754-779.
- [2] M. G. Crandall and P.-L. Lions, Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Math. Comp. **43** (1984), no. 167, 1-19.
- [3] L. C. Evans, Adjoint and compensated compactness methods for Hamilton-Jacobi PDE, Arch. Ration. Mech. Anal. **197** (2010), no. 3, 1053-1088.
- [4] W. Fleming, The convergence problem for differential games II, Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 195-210, 1964.
- [5] W. Fleming, The Cauchy problem for degenerate parabolic equations, J. Math. Mech. **13** (1964), 987-1008.
- [6] S. Koike, T. Kosugi and M. Naito, On the rate of convergence of solutions in free boundary problems via penalization, J. Math. Anal. Appl. **457** no. 1 (2018), 436-460.
- [7] H. Mitake and H. V. Tran, Large-time behavior for obstacle problems for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations. Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), no. 2, 2039-2058.
- [8] H. V. Tran, Adjoint methods for static Hamilton-Jacobi equations, Calc. Var. Partial Differential Equations **41** (2011), no. 3-4, 3013-19.